

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики



С целью защиты авторских прав
НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Е.В. Хорошилова

**КУРС СЕМИНАРОВ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

Самоучитель

Книга 4

**ФУНКЦИИ МНОГИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ:
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Учебное пособие
для очной, дистанционной и смешанной форм обучения
студентов университетов

Москва—2023

УДК 378.4:517.1:517.2:517.5

ББК 22.16

X82

Рецензенты:

проф. Гасников А.В. (МФТИ, Долгопрудный), проф. Петров Л.Ф. (РЭА им. Г.В. Плеханова, Москва), проф. Мижидон А.Д. (Восточно-Сибирский ГУТиУ, Улан-Удэ), проф. Срочко В.А. (Иркутский ГУ)

Хорошилова Е.В.

Х 82 Курс семинаров по математическому анализу: Самоучитель. – В 4-х кн. – Кн. 4. Функции многих действительных переменных: Дифференциальное исчисление. – Учеб. пособие для очной и дистанционной форм обучения студентов университетов. – М.: Издательство МГУ, 2022. – 436 с.

Четвёртая, заключительная, книга нового пособия–задачника из 4-х книг (всего более 3600 задач с решениями) включает около 720 задач и посвящена отработке навыков основных видов исследований по теме «Дифференциальное исчисление функций многих действительных переменных».

В книге приводятся необходимые теоретические сведения, основной акцент делается на систематизации приёмов и методов решения. Изложение методов сопровождается разбором примеров и задачами разных типов для самостоятельного решения.

Для студентов младших курсов университетов, обучающихся математическим и инженерно–технологическим специальностям, и молодых преподавателей.

УДК 378.4:517.1:517.2:517.5

ББК 22.16

© Хорошилова Е. В., 2022

Содержание

Предисловие	7
1 СЕМИНАР: Виды m-мерных пространств и множеств точек в них. Последовательности точек и их пределы. Понятие функции многих переменных	11
1.1 Виды m -мерных пространств	11
1.2 Виды множеств в евклидовом пространстве	14
1.3 Последовательности точек в $\mathbb{R}^m$. Предел последовательности . .	19
1.4 Критерий Коши сходимости последовательности точек в $\mathbb{R}^m$. .	20
1.5 Ограниченные последовательности точек в $\mathbb{R}^m$. Понятие подпоследовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса	21
1.6 Понятие функции m переменных. Область определения, множество значений, график	22
1.7 Скалярное поле. Поверхности (линии) уровня функции	24
1.8 Ограниченные функции. Точные грани. Наибольшее и наименьшее значения. Теоремы Вейерштрасса	27
1.9 Задачи для самостоятельного решения	30
1.10 Ответы и решения	35
2 СЕМИНАР: Предел функции многих переменных (кратный, повторные)	42
2.1 Понятие m -кратного предела по Гейне и по Коши, повторных пределов	42
2.2 Критерий Коши существования предела функции m переменных	47
2.3 Арифметические операции над функциями m переменных, имеющими предел	47
2.4 Бесконечно малые и бесконечно большие функции m переменных и их асимптотическое сравнение	48
2.5 Приёмы вычисления кратных пределов	50
2.6 Задачи для самостоятельного решения	57
2.7 Ответы и решения	61
3 СЕМИНАР: Непрерывность и равномерная непрерывность функции многих переменных	71
3.1 Непрерывность по совокупности переменных и по каждой из переменных в отдельности	71
3.2 Свойства непрерывных функций m переменных: основные теоремы	78
3.3 Равномерная непрерывность функций m переменных. Теорема Кантора и 11 теорем о равномерно непрерывных функциях . . .	80
3.4 Задачи для самостоятельного решения	85

3.5	Ответы и решения	94
4	СЕМИНАР: Дифференцируемость функции многих переменных. Частные производные и дифференциал	112
4.1	Понятие частных производных функции m переменных	112
4.2	Понятие дифференцируемости функции m переменных. Первый дифференциал	114
4.3	Матрица Якоби, функциональный определитель (якобиан)	118
4.4	Геометрический смысл дифференцируемости и дифференциала функции в точке	120
4.5	Приближённые вычисления с помощью первого дифференциала	121
4.6	Исследование функций на дифференцируемость. Условие дифференцируемости в форме предела	122
4.7	Теоремы о свойствах дифференцируемых функций	123
4.8	Задачи для самостоятельного решения	127
4.9	Ответы и решения	135
5	СЕМИНАР: n-кратная дифференцируемость. Дифференцирование сложной функции.	159
5.1	Частные производные высших порядков. Понятие n -кратной дифференцируемости	159
5.2	Достаточные условия n -кратной дифференцируемости и равенства смешанных производных. Теоремы Юнга	161
5.3	Дифференциалы высших порядков, их связь с n -кратной дифференцируемостью в случае независимых переменных	163
5.4	Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Полная производная	167
5.5	Задачи для самостоятельного решения	174
5.6	Ответы и решения	179
6	СЕМИНАР: Производная в заданном направлении, градиент. Касательные и нормали к кривым линиям и поверхностям	201
6.1	Производная в заданном направлении: физический и геометрический смыслы, связь с дифференцируемостью	201
6.2	Градиент и его основные свойства. Арифметические операции с градиентами	206
6.3	Элементы дифференциальной геометрии: касательные и нормали к кривым линиям и поверхностям	210
6.3.1	Касательная и нормаль к плоской кривой	210
6.3.2	Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой	211

6.3.3	Касательная плоскость и нормальная прямая к поверхности	213
6.4	Задачи для самостоятельного решения	216
6.5	Ответы и решения	222
7	СЕМИНАР: Формула Тейлора для функции многих переменных	241
7.1	Формула Тейлора. Виды остаточных членов	241
7.2	Практика разложения функций по формуле Тейлора	244
7.3	Условия разложения функции в ряд Тейлора	246
7.4	Задачи для самостоятельного решения	248
7.5	Ответы и решения	252
8	СЕМИНАР: Локальные экстремумы функции многих переменных. Выпуклые функции	269
8.1	Локальные и краевые экстремумы	269
8.2	Необходимое условие локального экстремума	270
8.3	Достаточные условия локального экстремума	272
8.4	Выпуклые функции многих переменных. Неравенства Йенсена.	279
8.5	Задачи для самостоятельного решения	284
8.6	Ответы и решения	286
9	СЕМИНАР: Дифференцирование и нахождение экстремумов неявно заданных функций	307
9.1	Теоремы о существовании и единственности дифференцируемой функции, заданной неявно	307
9.2	Теорема о существовании и единственности системы неявных функций	313
9.3	Экстремум неявно заданной функции	315
9.4	Задачи для самостоятельного решения	318
9.5	Ответы и решения	324
10	СЕМИНАР: Условный экстремум. Метод неопределённых множителей Лагранжа	346
10.1	Понятие условного экстремума	346
10.2	Метод множителей Лагранжа	347
10.3	Нахождение точных граней функций на замкнутых ограниченных множествах	354
10.4	Задачи для самостоятельного решения	356
10.5	Ответы и решения	359

11 СЕМИНАР: Замена переменных в дифференциальных выражениях (уравнениях)	383
11.1 Дифференциальные преобразования с функциями одной переменной	384
11.2 Дифференциальные преобразования с функциями двух переменных	388
11.3 Задачи для самостоятельного решения	398
11.4 Ответы и решения	404
12 Варианты заданий для самопроверки, подготовки к контрольным работам и зачёту	424
12.1 ВАРИАНТ № 1	425
12.2 ВАРИАНТ № 2	426
12.3 ВАРИАНТ № 3	427
12.4 ВАРИАНТ № 4	428
12.5 ВАРИАНТ № 5	429
12.6 ВАРИАНТ № 6	430
Предметный указатель	431
Список литературы	434

Предисловие

*«Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду,
а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!»*

*Д. Пойа (1887–1985) – венгерский, швейцарский и
американский математик, популяризатор науки.*

Книга посвящена одному из фундаментальных разделов, традиционно изучаемых на первых курсах высших учебных заведений в рамках математического анализа – дифференциальному исчислению функций многих переменных. Вводятся понятие действительностнозначной функции нескольких действительных переменных, её области определения и области значений, поверхностей уровня, определяются повторные и кратные пределы, непрерывность по совокупности и по каждой переменной в отдельности, равномерная непрерывность функции. Также вводятся понятия частных производных и производной в заданном направлении, градиента, обобщается понятие дифференцируемости и дифференциала. Далее в пособии рассматриваются способы дифференцирования сложной и неявно заданной функции (системы функций), изучаются необходимые и достаточные условия локальных экстремумов, разложение функции по формуле Тейлора, определяется понятие условного экстремума и приводится метод неопределённых множителей Лагранжа для его нахождения. Наконец, показывается, как можно сделать замену переменных в дифференциальных выражениях (уравнениях).

В основу пособия положен курс семинарских занятий, проводимых автором в течение многих лет на факультете ВМК МГУ. Для успешного усвоения материала рекомендуется предварительно прослушивать лекции по изучаемой теме. Каждый семинар начинается с основных определений, свойств и теорем курса. Акцент делается на разборе основных приёмов и методов решения задач и примерах их использования. В конце каждого семинара приводится подборка задач по теме семинара для самостоятельного решения. Задачи, большей частью, в течение многих лет собирались из разных источников (см. список использованной литературы) или, в существенно меньшей степени, составлялись автором. Автор с большим уважением относится к Борису Павловичу Демидовичу, которого считает недостижимым примером за огромный труд по составлению известного и очень популярного задачника по математическому анализу (задачи для него, а их свыше 4000, Борис Павлович, говорят, собирал в течение 15 лет). Студенты, помните, что только решение достаточного количества разнообразных задач позволяет практически усвоить учебный материал, добиваясь необходимой степени понимания.

Заметим, что не все приёмы решения задач разобраны в примерах, поэтому рекомендуем, даже если вы решили задачу (и уверены в этом), ознакомиться

с приведённым в книге решением. Возможно, вы увидите там какие-то незамеченные ранее нюансы, другой или просто более эффективный способ. Для этих целей в пособии приводятся более 700 задач и примеров с подробными решениями, что позволяет использовать его не только в качестве задачника в течение семестра, но и как *справочное пособие* при самостоятельном изучении данного раздела математики, а также при подготовке к контрольным и зачётным работам и экзамену. Особенно возрастает роль такого рода *самоучителей* при дистанционном и смешанном обучении.

Вместе с тем, всегда найдутся любознательные студенты, которым разобранных в книге задач будет недостаточно. В этом случае рекомендую обращаться к проверенным временем классическим учебникам по курсу математического анализа (например, трудам Г. М. Фихтенгольца,¹ Л. Б. Кудрявцева² и С. М. Никольского,³ В. А. Ильина,⁴ Э. Г. Позняка,⁵ В. А. Садовниченко,⁶

¹Григорий Михайлович *Фихтенгольц* (1888–1959) — русский и советский математик, с 1918 — профессор Петроградского (затем Ленинградского) университета, в котором проработал более сорока лет. Почти все ленинградские математики были в определённой степени его учениками. В разное время его лекции слушали С. Л. Соболев, Л. В. Канторович, И. П. Натансон, С. А. Христианович, С. Г. Михлин, Д. К. Фаддеев, и многие другие видные советские математики. Наиболее известен как автор трёхтомника «Курс дифференциального и интегрального исчисления».

²Лев Дмитриевич *Кудрявцев* (1923–2012) — математик, член-корреспондент АН СССР. Специалист в области теорий функций, уравнений с частными производными и топологии.

³Сергей Михайлович *Никольский* (1905–2012) — советский и российский математик, академик АН СССР (1972), академик РАН (1991). Был главным научным сотрудником МИАНа, профессором МФТИ и мехмата МГУ. В 2005 году в Москве состоялась конференция, посвящённая 100-летию С. М. Никольского, в которой он принял участие.

⁴Владимир Александрович *Ильин* (1928–2014) — советский и российский математик, профессор МГУ, академик РАН. Внёс заметный вклад в теорию дифференциальных уравнений, спектральную теорию дифференциальных операторов и математическое моделирование. Ученик А. Н. Тихонова. Работал на кафедре общей математики факультета ВМК МГУ: профессор (1970–1974), заведующий (1974–2014). Автор более 300 научных работ и соавтор учебников по математическому анализу, аналитической геометрии и линейной алгебре.

⁵Эдуард Генрихович *Позняк* (1923–1993) — математик, профессор кафедры математики физического факультета МГУ, заслуженный деятель науки РСФСР. В 1980 году совместно с В. А. Ильиным стал лауреатом Государственной премии СССР за учебники «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра» и «Основы математического анализа».

⁶Виктор Антонович *Садовниченко* (1939) — советский и российский математик. Ректор МГУ им. М. В. Ломоносова (1992). Президент Российского Союза ректоров (1994), председатель Российского совета олимпиад школьников. Академик РАН (1997), вице-президент РАН (2008–2013). Лауреат Государственной премии СССР (1989), Государственной премии Российской Федерации (2002) и трёх премий Правительства Российской Федерации (2006, 2011, 2012). Почётный гражданин Москвы (2008). Полный кавалер ордена «За заслуги перед Отечеством».

Бл. Х. Сендова,¹ В. А. Зорича²), задачникам Б. П. Демидовича³, Г. Н. Бермана⁴, И.А. Виноградовой, С.Н. Олехника, В.А. Садовниченко [5] и многим другим отечественным и зарубежным учебникам и задачникам, разработанным преподавателями вузов для студентов, а также проверенным интернет-источникам, научным трудам известных математиков по данной теме и, конечно, лекциям, читаемым для студентов на факультете. Автор данной книги, в свою очередь, выражает искреннюю признательность создателям тех задач, которые использованы в этом учебном пособии и, тем самым, дали возможность ему появиться.

При неоспоримом преимуществе очного обучения, книга дописывалась в условиях эпидемии коронавируса CoViD-19 (аббревиатура от англ. COronaVirus Disease 2019), во время массового перехода вузов с очной на дистанционную форму обучения. Автор постаралась учесть то обстоятельство, что акцент в изучении нового материала студентами переносится в этой ситуации из университетской аудитории в домашние условия, что требует от студента дополнительных усилий по самодисциплине и организации учёбы. Это накладывает дополнительные требования и на учебную литературу – она должна максимально ясно и чётко доносить до учащегося необходимые знания.

И в заключение несколько практических советов студентам. Следует иметь в виду, что проработку материала по любой теме не стоит откладывать «на потом», т. е. на время сессии. Лучше всего делать это регулярно, параллельно тому как на практических занятиях изучается тот или иной раздел. Если при этом возникают вопросы, то не надо стесняться задавать их преподавателю и своим друзьям-студентам. Важно проявлять инициативу, учиться размышлять, погружаться в тему, при необходимости консультируясь с теми, кто лучше вас разбирается в данной теме. Используйте любую возможность, поскольку, в первую очередь, вы заинтересованы в том, чтобы хорошо освоить

¹Благовест Христов *Сендов* (1932–2020) — болгарский математик и политический деятель. Работы по теории приближений, вычислительной геометрии. Автор более двухсот научных работ, 7 монографий и 30 учебников, в том числе соавтор учебника В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов «Математический анализ». С 1981 — академик, с 1988 по 1991 был председателем Болгарской академии наук.

²Владимир Антонович *Зорич* (род. 1937) — советский и российский математик, доктор физико-математических наук (1969), профессор (1971). Заслуженный профессор МГУ (2007). Автор широко известного учебника «Математический анализ»

³Борис Павлович *Демидович* (1906–1977) — советский математик и педагог, специалист в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа, математической физики (ученик А. Н. Колмогорова). Автор одного из наиболее известных в математической среде бывшего СССР сборников задач по математическому анализу.

⁴Георгий Николаевич *Берман* (1908–1949) — советский математик, автор учебников, учебных пособий и научно-популярных книг, которые в период с 1938 по 2015 год изданы общим тиражом свыше 6 миллионов экземпляров.

изучаемую дисциплину и стать в итоге хорошим специалистом.

Отвечая на экзамене на вопросы, чётко формулируйте необходимые определения и теоремы. Надо приучить себя к аккуратности и строгости проведения математических доказательств, быть готовым в любой момент, если понадобится, привести все необходимые пояснения и обоснования. Поэтому при работе с учебной литературой сразу обращайте внимание на встречающиеся в тексте определения и формулировки, старайтесь их запомнить.

Работа с любой учебной литературой требует от студента значительных усилий и способности к самостоятельной работе, поэтому такого рода книги помогут тем студентам, кто готов погружаться в готовые решения и предлагать свои. Для самопроверки ваших знаний в конце пособия приведены несколько вариантов заданий.

Начиная с младших курсов, участвуйте в студенческих конференциях. Будьте активны и любопытны! Тренируйтесь, решая задачи, приобретайте ценный опыт.

P.S. С удовольствием представляю вниманию читателей тщательно отобранные афоризмы и высказывания различных людей о математике и образовании. Они «вкраплены» по всей книге и, надеюсь, помогут вам настроиться на соответствующий творческий лад.

Желаем успеха в изучении данной темы!

Помните, это — *ваше образование*.

Е.В. Хорошилова, сентябрь 2022 г.

1 СЕМИНАР: Виды m -мерных пространств и множеств точек в них. Последовательности точек и их пределы. Понятие функции многих переменных

*«...Я слышу — и я забываю,
Я вижу — и я забываю,
Я делаю — и я понимаю».*
Китайская пословица.

С целью защиты авторских прав НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Мы познакомимся с функциями многих (нескольких) переменных и изучим их основные свойства. В качестве аргументов у этих функций служат не отдельные числа, а их наборы — точки, или векторы, в координатных пространствах. Зачастую эти пространства должны обладать определёнными свойствами, например, быть линейными или евклидовыми. Поэтому определим вначале все необходимые понятия.

1.1 Виды m -мерных пространств

Координатное пространство $\mathbb{R}^m$. Назовём m -мерным координатным пространством множество всевозможных упорядоченных наборов действительных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Для обозначения m -мерного координатного пространства воспользуемся символом $\mathbb{R}^m$. Запись $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ означает, что точка M имеет координаты $x_1, x_2, \dots, x_m$. В частности, при $m = 1$ получаем числовую прямую, при $m = 2$ — координатную плоскость, при $m = 3$ — трёхмерное координатное пространство. Самую точку мы будем обозначать в зависимости от ситуации $x = (x_1, \dots, x_m)$ или $M(x_1, \dots, x_m)$.

Линейное (векторное) пространство. Из курса линейной алгебры известно, что множество $\mathbb{R}^m$ с заданными на нём операциями сложения двух элементов и умножения элемента на действительное число, определяемыми по правилам

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m), \quad \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_m),$$

где $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, образует m -мерное линейное пространство, а набор векторов $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$,

..., $\vec{e}_m = (0, 0, \dots, 0, 1)$ является в нём базисом. Указанные операции должны удовлетворять следующим аксиомам линейного пространства:

- 1) для любых x, y выполняется $x + y = y + x$;
- 2) для любых x, y, z верно $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- 3) существует нулевой вектор 0 такой, что $x + 0 = x$;
- 4) для любого x существует противоположный ему вектор x' такой, что $x + x' = 0$;
- 5) для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет место $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
- 6) для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ имеет место $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
- 7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
- 8) существует единичный элемент такой, что $1 \cdot x = x$.

Евклидово пространство $\mathbb{E}^m$. Евклидовым пространством $\mathbb{E}^m$ называется линейное пространство над полем действительных чисел, в котором каждой паре элементов x, y поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое $\langle x, y \rangle$ или (x, y) , и называемое *скалярным произведением* этих элементов. При этом скалярное произведение удовлетворяет четырём аксиомам:

- 1) коммутативность: $\forall x, y \in \mathbb{E}^m$ выполняется $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- 2) дистрибутивность: $\forall x, y, z \in \mathbb{E}^m$ выполняется

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle;$$

- 3) однородность по первому сомножителю: $\forall x, y \in \mathbb{E}^m$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

- 4) неотрицательность скалярного квадрата: $\forall x \in \mathbb{E}^m, x \neq 0$, выполняется $\langle x, x \rangle > 0$, причём $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Характерной особенностью любого евклидова пространства является выполнение в нём неравенства *Коши–Буняковского*: для любых элементов x и y евклидова пространства $\mathbb{E}^m$ справедливо неравенство:

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle.$$

Пример 1. Простейшими примерами евклидовых пространств могут служить известные из курса элементарной математики конечномерные пространства:

- $\mathbb{E}^1$ размерности 1 (действительная прямая);
- $\mathbb{E}^2$ размерности 2 (евклидова плоскость);
- $\mathbb{E}^3$ размерности 3 (евклидово трёхмерное пространство). $\square$

Пример 2. Забегая вперёд, скажем, что множество $C[a, b]$ непрерывных (а следовательно, интегрируемых по Риману) на отрезке $[a, b]$ функций образует евклидово пространство, если скалярное произведение определить следующим образом: $\forall f(x), g(x) \in C[a, b]$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (1)$$

В пространстве $C[a, b]$ со скалярным произведением (1) неравенство Коши–Буняковского трансформируется в *неравенство Коши–Шварца*:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx. \quad \square$$

Нормированное пространство. Линейное пространство $\mathbb{V}^m$ называется *нормированным*, если определено правило, по которому $\forall x \in \mathbb{V}^m$ ставится в соответствие действительное число, называемое *нормой* (или *длиной*) указанного элемента и обозначаемое $\|x\|$ или $|x|$, удовлетворяющее следующим трём аксиомам:

- 1) $\forall x \neq 0$ выполняется $\|x\| > 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $\forall x \in \mathbb{V}^m$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ выполняется $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- 3) $\forall x, y \in \mathbb{V}^m$ справедливо $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*неравенство треугольника*, или *неравенство Минковского*).

В курсе линейной алгебры доказывается теорема.

Теорема. Всякое евклидово пространство является нормированным, если норму элемента определить в нём равенством $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Пример 3. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, где модуль вектора определяется как $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$, неравенство треугольника принимает вид:

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

или, в развёрнутой форме,

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_m + y_m)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2}. \quad \square$$

Пример 4. Пусть $p \geq 1$ и $x \in \mathbb{R}^m$. Тогда $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ является нормой в $\mathbb{R}^m$. $\square$

Пример 5. Пусть $x \in \mathbb{R}^m$. Тогда $\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \max_{1 \leq k \leq m} |x_k|$ является нормой в $\mathbb{R}^m$. $\square$

Метрическое пространство. Нормированное пространство всегда является *метрическим пространством*, т. е. таким пространством, в котором указано правило, ставящее в соответствие любым двум элементам x и y действительное число, называемое *расстоянием* между этими элементами и обозначаемое символом $\rho(x, y)$, при условии, что это правило удовлетворяет трём аксиомам:

- 1) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);
- 2) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника);

3) $\rho(x, y) \geq 0$ (неотрицательность), причём $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Достаточно определить расстояние как $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Например, в $\mathbb{R}^m$ для метрики $\rho(x, y)$ получаем

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}.$$

Пример 6. В пространстве $C[a, b]$ неравенство треугольника принимает вид:

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}. \quad \square$$

1.2 Виды множеств в евклидовом пространстве

«Было бы хорошо, если бы математические знания требовало само государство и если бы лица, занимающих высшие государственные должности, приучали заниматься математикой и в нужных случаях к ней обращаться».

Платон (428 до н. э. — 348 до н. э.) — древнегреческий философ, ученик Сократа, учитель Аристотеля.

Аналогично тому как это делалось на множестве действительных чисел, в m -мерном пространстве вводятся понятия внутренней, внешней, граничной, изолированной и предельной точек множества, а также понятия открытого и замкнутого множеств и некоторые другие.

Открытым m -мерным шаром радиуса R с центром в точке $M_0(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_m^\circ)$ назовём множество всех точек M пространства $\mathbb{R}^m$, которые удовлетворяют неравенству $\rho(M, M_0) < R$ (т. е. расположены от точки M_0 на расстоянии, меньшем R). Множество всех точек M пространства $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющих нестрогому неравенству $\rho(M, M_0) \leq R$, назовём *замкнутым m -мерным шаром* радиуса R с центром в точке M_0 . Соответственно, множество всех точек $M \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих равенству $\rho(M, M_0) = R$, называется *m -мерной сферой* радиуса R с центром в точке M_0 .

Назовём ε -окрестностью точки $M_0 \in \mathbb{R}^m$ открытый m -мерный шар радиуса ε с центром в точке M_0 .¹ Таким образом, ε -окрестность точки M_0 может быть задана неравенством $\rho(M_0, M) < \varepsilon$. Тот же шар с выколотым центром (т. е. без точки M_0), задаваемый неравенством $0 < \rho(M_0, M) < \varepsilon$, будем называть *проколотой ε -окрестностью* точки M_0 .

По отношению ко множеству $D \subset \mathbb{R}^m$ выделяют следующие виды точек.

¹Здесь и далее для обозначения конечномерного евклидова пространства наряду с $\mathbb{E}^m$ будем использовать обозначение $\mathbb{R}^m$. В общем случае *окрестностью точки* называют любое открытое в $\mathbb{R}^m$ множество, содержащее данную точку.

- Пределные и изолированные точки.

Точка M (она может как принадлежать, так и не принадлежать множеству D) называется *пределной точкой (точкой сгущения) этого множества*, если в любой (сколь угодно малой) окрестности этой точки находится хотя бы одна точка из множества D , отличная от M . Отсюда следует, что в любой окрестности предельной точки всегда содержится бесконечное число точек множества D .

Точка $M \in D$, не являющаяся предельной точкой множества D , называется *изолированной точкой* множества D . Изолированная точка – это такая точка множества, у которой есть окрестность, не имеющая с D других общих точек, кроме M .

Пример 7. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ не имеет изолированных точек. $\square$

Пространство, каждая точка которого является изолированной, называется *дискретным*.

Пример 8. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ дискретно, а множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ не является дискретным.

- Внутренние и внешние точки.

Назовём точку M *внутренней точкой* множества D , если она принадлежит множеству D вместе с некоторой её окрестностью. Множество всех внутренних точек множества D называется *внутренностью* данного множества, или его *ядром*, и обозначается $\text{int } D$.

Точка $M \notin D$ называется *внешней точкой* множества D , если существует её окрестность, не имеющая с множеством общих точек. То есть *внешние точки* – это те, которые не являются ни внутренними, ни граничными. Множество всех внешних точек множества D обозначается $\text{ext } D$. Для любого множества D множества $\text{int } D$ и $\text{ext } D$ открыты.

- Граничные точки.

Точка M называется *граничной точкой* множества D , если в любой её окрестности есть как точки, принадлежащие множеству, так и точки, ему не принадлежащие (т. е. это точка, не являющаяся ни внутренней, ни внешней точкой множества). Граничная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству. Множество всех граничных точек данного множества образуют его *границу* и обозначается ∂D .

Пример 9. Сфера является множеством граничных точек как открытого шара, так и замкнутого шара. При этом все точки сферы являются её граничными точками. Внутренних точек сфера как подмножество $\mathbb{R}^m$ не имеет. $\square$

Пример 10. Точка $M \in \mathbb{R}^m$ является граничной точкой множества $\mathbb{R}^m \setminus M$, которое не имеет внешних точек. $\square$

Различают следующие виды *множеств точек*.

- Открытые и замкнутые множества.

Множество точек D пространства $\mathbb{R}^m$ называется *открытым*, если любая точка этого множества является его внутренней точкой.

Множество D называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Используя понятие граничной точки, можно также определить замкнутое множество как множество, содержащее все свои граничные точки. Если множество не имеет ни одной предельной точки, то его принято считать замкнутым. Кроме своих предельных точек, замкнутое множество может также содержать изолированные точки. Граница любого множества замкнута. Замыкание любого множества замкнуто.

Объединение открытого (незамкнутого) множества D с его границей ∂D называется *замыканием* множества. Полученное в результате замыкания множество обозначается $\overline{D}$ и, очевидно, является замкнутым. Множество $D \subset \mathbb{R}^m$ является замкнутым тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием. Множество $D \subset \mathbb{R}^m$ является *замкнутым* в $\mathbb{R}^m$ тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R}^m \setminus D$ является множеством, открытым в $\mathbb{R}^m$.

Для любого множества D евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ верно:

1. $\text{int } D \cup \text{ext } D \cup \partial D = \mathbb{R}^m$.
2. $\text{int } D \cap \text{ext } D = \text{int } D \cap \partial D = \text{ext } D \cap \partial D = \emptyset$.
3. $D \cup \partial D = \text{int } D \cup \partial D = \overline{D}$.

Примеры открытых множеств в $\mathbb{R}^m$:

Пример 11. $\mathbb{R}^m$, пустое множество $\emptyset$. $\square$

Пример 12. Интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$, открытый шар $\rho(M_0, M) < \varepsilon$ или внешняя часть шара $\rho(M_0, M) > \varepsilon$. $\square$

Пример 13. Конечное или счётное объединение интервалов – открыты в $\mathbb{R}^1$. $\square$

Пример 14. Любое открытое множество в $\mathbb{R}$ можно представить в виде объединения интервалов с рациональными концами (т. е. с концами в рациональных точках). Важным следствием этого является тот факт, что любое открытое множество в $\mathbb{R}$ есть не более чем счётное объединение интервалов. $\square$

Пример 15. Любое открытое множество в $\mathbb{R}^m$ есть объединение не более чем счётного семейства открытых шаров. $\square$

Примеры замкнутых множеств в $\mathbb{R}^m$:

Пример 16. Любое конечное множество точек в $\mathbb{R}^m$ замкнуто, так как оно не имеет предельных точек. $\square$

Пример 17. Отрезок $[a, b]$ действительной прямой, квадрат $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2\}$, замкнутый шар $\rho(M_0, M) \leq \varepsilon$, сфера $\rho(M_0, M) = \varepsilon$, замкнутое кольцо $G = \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$. $\square$

Примеры множеств, не являющихся ни открытыми, ни замкнутыми:

Пример 18. Полуинтервал $[a, b)$, множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел в $\mathbb{R}^1$. $\square$

Пример 19. Полузамкнутое кольцо $G = \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 < b^2\}$ в $\mathbb{R}^2$. $\square$

Пример 20. Примеры множеств, являющихся одновременно и открытыми, и замкнутыми в $\mathbb{R}^m$: пустое множество и пространство $\mathbb{R}^m$. $\square$

Для открытых и замкнутых множеств справедливы следующие свойства:

1. Объединение конечного, счётного и, вообще, любого числа открытых множеств открыто. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.
2. Пересечение конечного, счётного и, вообще, любого числа замкнутых множеств замкнуто. Объединение конечного множества замкнутых множеств замкнуто.
3. Любое замкнутое множество можно представить в виде счётного пересечения открытых, а любое открытое – в виде счётного объединения замкнутых.

Пример 21. Например, в $\mathbb{R}^1$ имеем

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = [0, 1]; \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0, 1). \quad \square$$

• Связные множества.

Множество D точек пространства $\mathbb{R}^m$ называется *связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству. Замыкание связного множества связно. Объединение двух связных множеств, имеющих общую точку, связно.

Пример 22. Кольцо $D = \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$ является примером замкнутого связного множества. $\square$

Пример 23. Примером несвязного множества служит совокупность (объединение) двух непересекающихся открытых шаров в $\mathbb{R}^m$. $\square$

• Ограниченные (и неограниченные) множества.

Множество D точек пространства $\mathbb{R}^m$ называется *ограниченным*, если найдётся m -мерный шар, содержащий все точки этого множества. Иными словами, множество D *ограничено* в $\mathbb{R}^m$, если $\exists R > 0: \forall x \in D \Rightarrow \rho(x, O) \leq R$, где $O(0, \dots, 0)$. Соответственно, множество $D \subseteq \mathbb{R}^m$ называется *неограниченным*, если $\forall R > 0 \exists x \in D: \rho(x, O) > R$.

Диаметром множества $D \subset \mathbb{R}^m$ называется величина $d = \sup_{x, y \in D} \rho(x, y)$, где $\rho(x, y)$ – расстояние между точками x и y . Поэтому множество $D \subset \mathbb{R}^m$ можно назвать *ограниченным*, если его диаметр конечен.

Расстоянием $r(D_1, D_2)$ между множествами $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^m$ называется величина

$$r(D_1, D_2) = \inf_{\substack{x \in D_1 \\ y \in D_2}} \rho(x, y).$$

Пример 24. Охарактеризуем множество, задаваемое на плоскости неравенством $x < \frac{1}{4}y^2 + 2$ (внешность параболы, сделайте рисунок). Это неограниченная открытая связная область. $\square$

• Компактные множества (компакты).

Пусть множество $D \subset \mathbb{R}^m$. Семейство открытых множеств $\{G_\alpha\}$ называется *открытым покрытием* множества D , если каждая точка $x \in D$ принадлежит хотя бы одному из множеств G_α , т. е. если $D \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$. Множество $D \subset \mathbb{R}^m$ назовём *компактным* (компактом), если из любого покрытия D множествами, открытыми в $\mathbb{R}^m$, можно выделить конечное покрытие.

Лемма Гейне—Бореля (достаточные условия существования конечного подпокрытия). Пусть D — замкнутое ограниченное множество в пространстве $\mathbb{R}^m$. Тогда из всякой системы открытых множеств, покрывающих множество D , можно выделить конечную подсистему, также покрывающую множество D .

Обратное утверждение также верно. Поэтому в $\mathbb{R}^m$ множество D является *компактом* тогда и только тогда, когда D замкнуто и ограничено. Любое замкнутое в $\mathbb{R}^m$ множество, содержащееся в компакте, само является компактом.

Пример 25. Множество, состоящее из одной точки (или любого конечного набора точек), является компактным. $\square$

Пример 26. Расстояние между двумя компактными непересекающимися множествами в $\mathbb{R}^m$ больше нуля. $\square$

Пример 27. Отрезок $[a, b]$ является компактом в $\mathbb{R}$. Обобщением отрезка в пространстве $\mathbb{R}^m$ является m -мерный параллелепипед (брус)

$$\{x \in \mathbb{R}^m \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m\},$$

являющийся компактом в $\mathbb{R}^m$. $\square$

• Область.

Областью (открытым множеством) называется множество, все точки которого есть внутренние точки. Для того чтобы множество D было открытым, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со множеством $\text{int } D$ своих внутренних точек.

Пример 28. Открытые множества: интервал (a, b) как подмножество действительной прямой, открытый шар $\rho(M_0, M) < \varepsilon$, внешняя часть шара $\rho(M_0, M) > \varepsilon$, пустое множество. $\square$

Область называется *связной*, если две любые точки этой области можно соединить непрерывной линией, все точки которой суть внутренние точки области. Область называется *односвязной*, если любые два пути, расположенные внутри области и соединяющие точки A и B , можно, все время оставаясь полностью внутри, превратить один в другой непрерывной деформацией. Всякая замкнутая кривая, взятая внутри такой области, может быть непрерывной деформацией стянута в точку.

Объединение открытой области с её границей называют *замкнутой областью*. Ограниченная и связная область в m -мерном пространстве (открытая или замкнутая) есть, в некотором смысле, аналог конечного промежутка (соответственно, открытого или замкнутого).

Пример 29. Открытый m -мерный шар является ограниченной областью в $\mathbb{R}^m$. Дополнение к нему представляет собой неограниченное замкнутое множество. $\square$

- Всюду плотное (нигде не плотное) множество.

Если замыкание множества D совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^m$, то говорят, что D – *всюду плотное* в $\mathbb{R}^m$. В частности, на прямой множество называется всюду плотным, если оно имеет непустое пересечение с любым интервалом. Множество D называется *нигде не плотным*, если оно не плотно ни в одном шаре. В частности, в $\mathbb{R}^1$ множество D нигде не плотно, если для любых различных точек $a, b \in D$ найдётся интервал $(c, d) \subset (a, b)$, не пересекающийся с D .

Пример 30. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является всюду плотным в $\mathbb{R}$. Множество точек последовательности $a_n = 1/n$ является нигде не плотным. $\square$

Теорема Бэра. Отрезок нельзя представить в виде счётного объединения нигде не плотных множеств.

- *Выпуклое множество.*

Выпуклое множество – это множество, которое наряду с любыми двумя его точками A и B содержит также весь отрезок AB . *Выпуклой оболочкой* множества D называется наименьшее выпуклое множество, содержащее D . Выпуклая оболочка множества D обычно обозначается $\text{Conv } D$.

Пример 31. Выпуклые множества: отрезок, прямая, круг, плоскость, шар, куб, пирамида. Окружность и сфера не являются выпуклыми множествами. Любое выпуклое открытое множество на прямой является интервалом. $\square$

- *Совершенное множество.*

Замкнутое множество D называется *совершенным*, если оно не содержит изолированных точек, т. е. если каждая его точка является предельной точкой (совершенное множество совпадает со множеством всех своих предельных точек).

Пример 32. Сегмент $[a, b]$ – совершенное множество. Более сложный пример нигде не плотного совершенного множества – канторово множество. $\square$

1.3 Последовательности точек в $\mathbb{R}^m$. Предел последовательности

«Ученик, который учится без желания, —
это птица без крыльев».

Абу Мухаммад Муслих ад-Дин Абдуллах ибн Саадӣ
Ширазӣ (между 1200 и 1219–1292)
– персидский поэт и мыслитель.

Прежде чем ввести понятие функции многих переменных, введём понятия последовательности точек в m -мерном евклидовом пространстве и её предела, а также понятия ограниченной последовательности, подпоследовательности.

Наряду с тем, что при обобщении понятий на случай более высокой размерности возникают новые свойства, присущие именно пространствам большой размерности, некоторые из привычных свойств числовых последовательностей становятся неактуальными. Это связано с тем, что в пространствах размерности выше 1 отсутствует упорядоченность, а следовательно, и сравнение элементов последовательности между собой. Например, монотонность последовательности точек возможна, вообще говоря, лишь по отдельным координатам (переменным).

В связи с этим в понятии предела исчезают понятия односторонних пределов, но возникает возможность рассмотреть предел (непрерывность, дифференцируемость) в заданном направлении, причём количество таких направлений в точке бесконечно велико. Далее у вас будет замечательная возможность сравнить аналогичные понятия у функций одной и многих переменных.

Последовательность точек в пространстве $\mathbb{R}^m$. Понятие последовательности точек в m -мерном евклидовом пространстве обобщает понятие числовой последовательности и, как следствие, имеет много общего с этим понятием. Пусть каждому натуральному числу n ставится в соответствие точка M_n евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Возникающий при этом пронумерованный (упорядоченный) ряд точек $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ будем называть *последовательностью точек* евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ и обозначать $\{M_n\}$.

Сходящиеся последовательности и их предел. Последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ называется *сходящейся*, если существует точка A пространства $\mathbb{R}^m$ такая, что для любого положительного числа ε можно указать отвечающий ему номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при любом $n \geq N$ выполняется неравенство $\rho(M_n, A) < \varepsilon$. При этом точка A называется *пределом последовательности* $\{M_n\}$. Используемые обозначения:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = A, \quad \text{или} \quad M_n \rightarrow A \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

1.4 Критерий Коши сходимости последовательности точек в $\mathbb{R}^m$

«Порядок больше всего помогает ясному усвоению».

Цицерон (106 до н. э. – 43 до н. э.) – древнеримский политический деятель, оратор и философ.

Сформулируем две вспомогательные леммы, с помощью которых доказывается критерий Коши сходимости последовательности точек в евклидовом пространстве.

Лемма 1 (*необходимое и достаточное условие сходимости последовательности точек в $\mathbb{R}^m$*). Последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ сходится к точке A этого пространства тогда и только тогда, когда числовые последовательности $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ координат точек M_n сходятся соответственно к координатам $a_1, a_2, \dots, a_m$ точки A .

Лемма 2 (*необходимое и достаточное условие фундаментальности последовательности точек в $\mathbb{R}^m$*). Последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ является фундаментальной тогда и только тогда, когда является фундаментальной каждая из числовых последовательностей $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ соответствующих координат точек M_n .

Теорема (*критерий Коши сходимости последовательности точек в $\mathbb{R}^m$*). Для того чтобы последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

1.5 Ограниченные последовательности точек в $\mathbb{R}^m$. Понятие подпоследовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса

« — У меня айтишник знакомый получает под 300 тыс. руб.,
в лаборатории Касперского работает.
— Возьмите меня к себе!!!»

Пост в Яндекс-районе, сентябрь 2019

Определение ограниченной числовой последовательности легко переносится на случай m -мерного пространства. Так, последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ назовём *ограниченной*, если существует такое (положительное) число R , что для всех натуральных номеров n выполняется неравенство $\rho(M_n, O) \leq R$, где O — точка, все координаты которой равны 0 (начало координат).

Если $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ — произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то будем называть последовательность точек $M_{n_1}, M_{n_2}, \dots, M_{n_k}, \dots$ *подпоследовательностью* последовательности точек $\{M_n\}$ и обозначать $\{M_{n_k}\}$.

Теорема (*Больцано–Вейерштрасса*). Из любой ограниченной последовательности $\{M_n\}$ точек m -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

1.6 Понятие функции m переменных. Область определения, множество значений, график

«Мы с наслаждением познаём математику. . .

Она восхищает нас, как цветок лотоса».

Аристотель (384 до н. э. – 322 до н. э.) —
древнегреческий философ, ученик Платона.

С 343 до н. э. – воспитатель Александра Македонского.

Рассмотрим m -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ и непустое множество D , принадлежащее ему. Пусть каждой точке $M(x_1, \dots, x_m) \in D$ поставлено в соответствие единственное действительное число u . Тогда говорят, что на множестве D определена функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$, где $x_1, x_2, \dots, x_m$ называются *независимыми переменными*, или *аргументами функции*, u – зависимой переменной, или значением функции в точке M . При этом множество D называется *областью определения* функции $u = f(M)$ и обозначается D_f или $\text{dom } f$, а множество

$$E_f = \{u = f(M) \in \mathbb{R} \mid M \in D_f\}$$

называется *областью (множеством) значений* функции. Функцию m переменных можно рассматривать как отображение некоторого множества в пространстве $\mathbb{R}^m$ в некоторое множество в пространстве $\mathbb{R}$. Обозначение функции:

$$f : D_f \rightarrow E_f.$$

Мы определили однозначную действительнозначную функцию m действительных переменных.

Графиком функции $u = f(M)$, $M \in D_f \subseteq \mathbb{R}^m$, называется гиперповерхность Γ в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$, определяемая как множество

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, f(x_1, x_2, \dots, x_m)) \mid M \in D_f\}.$$

Функции многих переменных, как и функции единственной переменной, могут быть заданы явно, неявно и параметрически. Для функций трёх переменных аналогом полярной системы координат является *сферическая система координат*:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad \text{где } r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi).$$

Иногда для таких функций бывает удобно использовать *цилиндрические координаты*

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad \text{где } r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi),$$

и различные обобщения этих видов координат.

По отношению к функциям многих переменных также вводятся понятия предела, непрерывности, дифференцируемости и прочее. Как при любом обобщении, возникают дополнительные возможности и понятия, которые в частном случае при $m = 1$ превращаются в хорошо известные аналоги для функций одной переменной.

Рассмотрим несколько примеров функций двух переменных, которые часто обозначаются $z = f(x, y)$ или $z = z(x, y)$.

Пример 33. Найти область определения и множество значений функции двух переменных $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Решение. Область определения задаётся неравенством $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, или $x^2 + y^2 \leq 2^2$, и определяет замкнутый круг радиуса 2 с центром в точке $(0, 0)$. В силу неравенства $0 \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq 2$ множеством значений данной функции является отрезок $[0, 2]$. При этом значение 0 достигается, например, в точке $(0, 2)$, а значение 2 – в точке $(0, 0)$. $\square$

Пример 34. Найти область определения функции двух переменных

$$z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$$

и нарисовать её на плоскости Oxy .

Решение. Область определения задаётся так:

$$D(f) = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \geq 1\}.$$

Изобразите её самостоятельно. $\square$

Пример 35. Описать (изобразить), как выглядит алгебраическая поверхность, задаваемая уравнением $z = x^2 + y^2$, и как она называется.

Решение. Заметим, что в силу неотрицательности функции вся поверхность расположена в верхнем полупространстве $z \geq 0$. Кроме того, в сечении данной поверхности координатными плоскостями Oxz и Oyz получаются параболы $z = x^2$ и $z = y^2$ соответственно, а в сечении этой поверхности плоскостью $z = z_0$ ($z_0 > 0$) образуются окружности, радиус которых тем больше, чем больше z_0 . Такая поверхность называется круговым *параболоидом* (параболоидом вращения), и его ось вращения совпадает с осью аппликата. $\square$

Пример 36. Описать, как выглядит и как называется алгебраическая поверхность, задаваемая уравнением

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Решение. Заметим, что данная поверхность симметрична относительно всех трёх координатных плоскостей, причём в сечении поверхности координатными плоскостями Oxz и Oyz получаются две пересекающиеся прямые $z = \pm x$ и $z = \pm y$, а в сечении этой поверхности плоскостью $z = z_0$ ($z_0 \neq 0$) образуются окружности, радиус которых тем больше, чем больше $|z_0|$. При этом поверхность проходит через начало координат. Такая поверхность называется круговым *конусом* (конусом вращения), и его ось совпадает с осью аппликата. $\square$

1.7 Скалярное поле. Поверхности (линии) уровня функции

«Лучше совсем не знать чего-либо, чем знать плохо».

Публилий Сир (1 век до н. э.) – римский поэт эпохи Цезаря и Августа.

Построение графиков функций даже двух переменных является довольно сложной задачей. Существенную помощь в её решении может оказать построение так называемых поверхностей уровня.

Если каждой точке M заданной области пространства $\mathbb{R}^m$ поставлено в соответствие некоторое действительное число u , то говорят, что в этой области задано *скалярное поле*.¹ Другими словами, скалярное поле задаётся функцией, отображающей $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$ (скалярной функцией точки пространства).

Пример 37. Если функция $u = u(x, y, z)$, определённая в $D \subseteq \mathbb{R}^3$, задаёт температуру в точке (x, y, z) , то говорят, что в D задано скалярное *поле температур*. Если область D заполнена жидкостью или газом и $u = u(x, y, z)$ означает давление в точке (x, y, z) , то имеется скалярное поле давлений и т. д. $\square$

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеется область D , в которой задана скалярная функция $u = u(x, y, z)$. Рассмотрим точки области D , в которых функция $u(x, y, z)$ имеет (сохраняет) постоянное значение, равное C :

$$u(x, y, z) = C.$$

Совокупность всех таких точек (для каждого допустимого значения C) образует в трёхмерном пространстве некоторую поверхность. Эти поверхности называются *поверхностями уровня* функции $u = u(x, y, z)$. При этом через

¹Чаще всего мы будем рассматривать пространства размерности 2 или 3, так как в этих случаях поверхности уровня имеют ясный геометрический смысл.

каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня, и каждому значению константы C соответствует одна поверхность уровня. Поверхности уровня, отвечающие разным значениям C , не пересекаются.

Пример 38. Если функция $u(x, y, z)$ означает температуру в точке (x, y, z) , то поверхности уровня называют *изотермами*, а если $u(x, y, z)$ означает давление в точке (x, y, z) , то для поверхностей уровня используют термин *изобары*. $\square$

В случае функций двух переменных поверхности уровня называют *линиями уровня*.²

Пример 39. Найти линии уровня функции $u(x, y) = x^2 + y^2$.

Решение. Приравняв функцию к произвольной (неотрицательной) константе C , получим уравнение линий уровня: $x^2 + y^2 = C$. Очевидно, это будет семейство концентрических (с общим центром) окружностей с центром в точке $(0, 0)$ и радиусом $\sqrt{C}$. Значению $C = 0$ соответствует точка $(0, 0)$. $\square$

Пример 40. Найти линии уровня функции $u(x, y) = xy$.

Решение. Линии уровня в данном случае задаются уравнением $xy = C$, которое при $C \neq 0$ можно переписать в виде $y = \frac{C}{x}$. Видно, что это будет семейство гипербол с общим центром в точке начала координат. Значению константы $C = 0$ соответствуют две прямые $x = 0$ и $y = 0$. $\square$

Пример 41. Найти линии уровня функции

$$z = \frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$

Решение. Линии уровня данной функции задаются уравнением $\frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = C$, или $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1/C$. Это – семейство концентрических (с общим центром) окружностей, радиус которых уменьшается с ростом аппликаты z (Рис. 1). $\square$

Пример 42. Найти поверхности уровня функции

$$u(x, y, z) = x + y + z.$$

Решение. Поверхности уровня задаются уравнением $x + y + z = C$, которое определяет семейство параллельных плоскостей. $\square$

²Термин «линии уровня» заимствован из картографии. Там линиями уровня называют линии, на которых высота точек земной поверхности над уровнем моря одинакова. По ним можно судить не только о высоте над уровнем моря определенной точки местности, но и о характере рельефа данной местности. В метеорологии пользуются сетями *изотёрм* и *изобар* – линий одинаковых средних температур и линий равных средних давлений. Изотермы и изобары являются линиями уровня температуры и давления как функций координат точки местности (т. е. функций двух переменных).

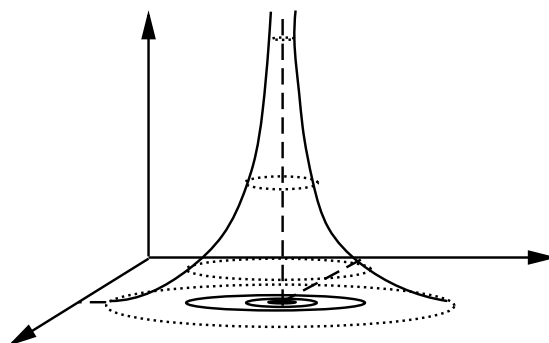


Рис. 1: Линии уровня функции $z = \frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

Пример 43. Найти поверхности уровня функции

$$u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Решение. Поверхности уровня задаются уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = C$, которое при любом положительном C определяет концентрические (с общим центром) сферы радиуса $\sqrt{C}$. $\square$

1.8 Ограниченные функции. Точные грани. Наибольшее и наименьшее значения. Теоремы Вейерштрасса

«Образование — это главный ресурс нашего развития. Национальная система образования должна опираться на научные и образовательные школы, возглавляемые ведущими российскими учёными».

Садовничий В.А. (род. 1939 г.) — ректор Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (с 1992 г.), президент Российского союза ректоров, из заявления на расширенном заседании Совета Российского Союза Ректоров 2 июня 2022 г.

Определения этого пункта, в основном, аналогичны соответствующим определениям для функций одной переменной.

Функция $u = f(M)$ называется *ограниченной* на множестве $D \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^m$, если существует положительное число C такое, что при всех $M \in D$ выполняется условие $|f(M)| \leq C$.

Точные грани функции. *Точной верхней (нижней) гранью функции $u = f(M)$, определённой на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^m$, называется точная верхняя (нижняя) грань множества её значений. Точная верхняя грань функции обозначается*

$$\sup_{M \in D} f(M),$$

а точная нижняя, соответственно, $\inf_{M \in D} f(M)$.

У ограниченных функций точные грани конечны.

Пример 44. Функция $y = \arctg(x + y)$ является ограниченной на $\mathbb{R}^2$, поэтому у неё существуют обе конечные точные грани:

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \arctg(x + y) = \frac{\pi}{2}, \quad \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \arctg(x + y) = -\frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Иначе: *точной верхней гранью функции $u = f(M)$ на множестве D называется число $u^* \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее двум требованиям:*

- 1) $f(M) \leq u^*$ для всех точек $M \in D$;

2) для любого¹ $\varepsilon > 0$ найдётся хотя бы одна точка M множества D , для которой $f(M) > u^* - \varepsilon$.

Аналогично определяется точная нижняя грань функции.

Наибольшее и наименьшее значения функции. Если точные грани достигаются (в каких-либо точках множества D), то они называются, соответственно, наибольшим и наименьшим значениями функции на этом множестве. Точнее, действительное число A называется *наибольшим* (соответственно, *наименьшим*) *значением* функции $f(M)$ на множестве D , если:

- 1) для любых $M \in D$ выполняется $f(M) \leq A$ (соответственно, $f(M) \geq A$);
- 2) существует точка $M_0 \in D$ такая, что $f(M_0) = A$.

Обозначение:

$$A = \max_{M \in D} f(M)$$

(в случае наименьшего значения $A = \min_{M \in D} f(M)$).¹ Наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве называют также её *глобальными* максимумом и минимумом.

Наибольшее и наименьшее значения функции (если они существуют) единственны и конечны. Для того чтобы у функции на заданном множестве существовали наибольшее и наименьшее значения, необходимо (но не достаточно), чтобы функция была ограничена на этом множестве.

Пример 45. Функция $y = \operatorname{arctg}(x + y)$ является ограниченной на $\mathbb{R}^3$, но при этом у неё не существует ни наименьшего, ни наибольшего значений. $\square$

В некоторых случаях существование наибольшего и наименьшего значений гарантировано.

Теорема 1 (1-я теорема Вейерштрасса). Функция $f(M)$, определённая и непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}^m$, ограничена на этом множестве.

Теорема 2 (2-я теорема Вейерштрасса). Функция $f(M)$, определённая и непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}^m$, обязательно достигает в некоторых точках этого множества своих наибольшего и наименьшего значений.

Пример 46. Функция $y = \sqrt[3]{x^4 + xy^2 - \frac{1}{x^2 + 2}}$ непрерывна в замкнутом ограниченном круге (компактное множество)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

¹Сколь угодно малого.

¹Первое из условий в этом определении означает, что A является наибольшим из всех значений функции на множестве D , а второе – что это значение достигается хотя бы в одной точке множества D .

поэтому в силу 1-й теоремы Вейерштрасса она, во-первых, ограничена в этом круге, а во-вторых, в силу 2-й теоремы Вейерштрасса, достигает на нём своих точных нижней и верхней граней. $\square$

*«Знание только тогда знание, когда оно приобретено усилиями своей мысли,
а не памятью».*

*Л.Н. Толстой (1828–1910) – один из наиболее
известных русских писателей и мыслителей, один из
величайших в мире писателей-романистов.
Участник обороны Севастополя.*

1.9 Задачи для самостоятельного решения

№1. Используя определение метрики в пространстве, выясните, является ли метрикой на числовой прямой функция $\rho(x, y)$:

$$\text{а) } \rho(x, y) = |x - y|; \quad \text{б) } \rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + (x - y)^2}; \quad \text{в) } \rho(x, y) = |xy|;$$

$$\text{г) } \rho(x, y) = (x - y)^2; \quad \text{д) } \rho(x, y) = \frac{|x - y|}{x^2 + 2y^2 + 1}.$$

Задачи на множества:

[12, с. 36 (доп.)] Для каждого из приведённых ниже множеств определить, является ли оно а) замкнутым; б) открытым; в) ограниченным; г) связным; д) односвязным:

№2. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| \leq 2, |y + 1| \leq 4\};$

№3. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + 1| \leq 1, |y + 1| > 4\};$

№4. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 2, |y + 1| \leq 4\};$

№5. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, |y + 1| < 4\};$

№6. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin x \leq 0, |y + 1| \leq 4\};$

№7. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, x + y = 0\};$

№8. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 < \sin x \leq \frac{1}{3}, |y + 1| \leq 4\};$

№9. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 2, x \neq 0\}.$

№10. Привести пример множества в $\mathbb{R}^m$, не имеющего предельных точек.

№11. Привести пример множества, которое не является ни открытым, ни замкнутым.

№12. Является ли множество открытым или замкнутым в $\mathbb{R}^m$: а) точка; б) само пространство $\mathbb{R}^m$; в) пустое множество?

№13. Исследовать на открытость (замкнутость) множество

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

№14. Верно ли утверждение: если множество $D \in \mathbb{R}^3$ не содержит всех точек этого пространства, то оно имеет граничные точки.

№15. Для сферы в $\mathbb{R}^m$ найти её граничные и внутренние точки. Каким множеством – открытым или замкнутым – является сфера?

№16. Дано множество, образованное точками плоскости, расположенными вне прямолинейного отрезка $[0, 1]$. Что является множеством его граничных точек? Внешних точек?

№17. На плоскости $\mathbb{R}^2$ задан интервал $I = \{(x, 0) \mid a < x < b\}$. Найти граничные точки, внешние точки и замыкание этого множества.

№18. Найти $\text{int } G$, $\text{ext } G$ и ∂G для множества $G \in \mathbb{R}$, если G – множество точек интервала (a, b) , координаты которых – рациональные числа.

№19. Найти граничные точки множества иррациональных чисел в $\mathbb{R}^1$.

№20. Привести пример множества D в $\mathbb{R}^2$ такого, что $\partial D = D$.

№21. Привести примеры множеств в $\mathbb{R}^1$ (или в $\mathbb{R}^2$), не удовлетворяющих условию

$$\text{int } (A \cup B) = \text{int } A \cup \text{int } B.$$

№22. Привести пример множества $D \subset \mathbb{R}^2$ такого, что $\text{ext } D = \emptyset$. Что является границей этого множества?

№23. Привести пример множества D такого, что $D \subset \partial D$.

№24. Канторово множество – открыто или замкнуто?¹

№25. Определим расстояние между двумя множествами A и B в $\mathbb{R}^m$ как

$$\inf \{ \rho(M, N) \mid M \in A, N \in B \}.$$

Может ли расстояние между двумя замкнутыми непересекающимися множествами в $\mathbb{R}^m$ быть равно нулю?

№26. Привести пример двух непересекающихся ограниченных множеств в $\mathbb{R}^2$, расстояние между которыми равно нулю.

Задачи на нахождение области определения и множества значений функции:

№27. [8, № 3137] Определить и изобразить область существования функции

$$u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}.$$

№28. Найти область определения функции

$$z = \arcsin \frac{x}{y} + \arcsin \frac{y}{x}.$$

№29. Найти и изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{y \cdot \sin x}.$$

№30. Найти и изобразить область определения функции

$$z = \sqrt[4]{1 - |x| - |y - 1|} + \sqrt[4]{1 - |x - 2| - |y - 1|}.$$

¹Классическое построение. Из единичного отрезка $C_0 = [0, 1]$ удалим среднюю треть, т. е. интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Оставшееся множество обозначим через C_1 . Множество $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ состоит из двух отрезков; удалим теперь из каждого отрезка его среднюю треть, и оставшееся множество обозначим через C_2 . Повторив эту процедуру опять, удаляя средние трети у всех четырёх отрезков, получаем C_3 . Дальше таким же образом получаем последовательность замкнутых множеств $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$. Пересечение $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$ называется *канторовым множеством*. Канторово множество континуально. Описано в 1883 году Г. Кантором.

Каково множество значений этой функции?

№31. Найти область определения и множество значений функции

$$f(x, y, z) = \arccos |x + 2y + 3z|.$$

№32. Найти область определения функции

$$f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \left(\sqrt[4]{x + y + z} \right) - \arcsin \left(2^{\ln \sqrt[4]{1+x+y+z}} \right).$$

№33. Найти область определения функции

$$f(x, y, z) = \frac{\operatorname{ch}^2(x + y + z) - \operatorname{sh}^2(x + y + z)}{\lg(9 - x^2 - y^2 - z^2)}.$$

№34. Найти область определения функции

$$f(x, y, z) = \operatorname{arctg} |x + \sqrt[3]{yz}| + \operatorname{arctg} |x + \sqrt[3]{yz}| + (xyz)^0.$$

№35. Найти область определения (существования) функции

$$u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2).$$

№36. Функция $f(x, y, z)$ определена при всех $x, y, z \in \mathbb{R}$ таких, что $xyz = 1$. Найти её область значений, если

$$f(x, y, z) = \frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx}.$$

№37. [ДВИ МГУ–2014(8)]. Пусть

$$f(x, y) = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y,$$

$$g(x, y) = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y.$$

Найти все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Задачи на нахождение линий и поверхностей уровня:

№38. [8, № 3166] Найти поверхности уровня функции

$$u = x + y + z.$$

№39. Найти и построить линии уровня скалярной функции

$$z = x^2 - y^2.$$

№40. Найти и построить линии уровня функции¹

$$z = \min(x, y).$$

¹Наименьшее из двух чисел x и y .

№41. Найти и построить линии уровня функции²

$$z = \max(|x|, |y|).$$

№42. Найти и построить линии уровня функции

$$z = |x| + |y| - |x + y|.$$

№43. Найти поверхности уровня функции

$$f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(x + 5y - z).$$

№44. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}.$$

№45. Найти поверхности уровня функции

$$u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

№46. [8, № 3168] Найти поверхности уровня функции

$$u = x^2 + y^2 - z^2.$$

Решить задачи на нахождение явного вида функции:

№47. [8, № 3180] Найти $f(x, y)$, если $f\left(x + y, \frac{x}{y}\right) = x^2 - y^2$.

№48. [8, № 3179] Пусть

$$z = x + y + f(x - y).$$

Найти функции f и z , если $z = x^2$ при $y = 0$.

Разные задачи:

№49. Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $M = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, при этом $f(x, 0) \equiv \operatorname{const}$, $0 \leq x \leq 1$, и для любого $x_0 \in [0, 1]$ имеем $f(x_0, y) \equiv \operatorname{const}$, $0 \leq y \leq 1$. Доказать, что $f(x, y)$ постоянна на всём квадрате.

Решить задачи средствами элементарной математики:

№50. Найти область значений функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

²Наибольшее из двух чисел $|x|$ и $|y|$.

№51. [Олимпиада «Ломоносов–2018», 9 кл., заключительный этап]. Функция

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2} + \frac{4}{4 - y^2}$$

определена на множестве, задаваемом условиями $|x| < 1$, $|y| < 2$, $xy = 1$. Найти её наименьшее значение и точку, в которой оно достигается.

№52. Является ли функция $f(x, y)$ ограниченной, если

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}, & \text{если } x^2 + y^6 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^6 = 0. \end{cases}$$

№53. Известно, что $16y^2 + x^2 = 4$. Является ли функция $f(x, y) = xy$ ограниченной на этом множестве? Если да, то найти её точные грани.

№54. [Высшая школа бизнеса МГУ, вступит. экзамен–2004]. Найти наибольшее значение выражения $3x - 2y$ на множестве переменных x, y , удовлетворяющих условию

$$4x^2 + y^2 = 16.$$

№55. [ВМК, олимпиада, устн.–2003]. Найти наименьшее значение выражения

$$x^2 + 5y^2 + 8z^2, \quad \text{если } xy + xz + yz = -1.$$

№56. Найти наименьшее значение функции

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x + 12y - 4xz + 15.$$

№57. Найти наименьшее значение функции

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2 y^2}.$$

№58. Найти точную нижнюю грань функции

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2 + \frac{1}{x^6 y^2}.$$

В каких точках она достигается?

№59. Найти точную нижнюю грань при $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ функции

$$f(x, y, z) = \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x}.$$

Достигается ли она?

1.10 Ответы и решения

1. а) Да. б) Нет, не выполнено неравенство треугольника $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, например, для $x = 10, y = 11, z = 0$. в) Нет, не выполнено условие $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. г) Не выполнено неравенство треугольника $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, например, для $x = 2, y = 0, z = 1$. д) Нет, не выполнено условие симметрии.

2. а) да; б) нет; в) да; г) да; д) да.

3. а) нет; б) нет; в) нет; г) нет; д) нет.

4. а) нет; б) нет; в) нет; г) да; д) нет.

5. а) да; б) нет; в) да; г) да; д) да.

6. а) да (дополнение – открыто); б) нет; в) нет; г) нет; д) нет.

7. а) нет; б) да; в) да; г) да; д) да.

8. а) да; б) нет; в) нет; г) нет; д) нет.

9. а) нет; б) нет; в) да; г) нет; д) нет.

10. Например, множество, состоящее из одной точки.

11. Например, множество рациональных чисел из полуинтервала $[0, \sqrt{2})$ в $\mathbb{R}^1$.

12. а) Замкнутое множество; б) $\mathbb{R}^m$ – одновременно открытое и замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$; в) $\emptyset$ – одновременно открытое и замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$.

13. Это множество имеет единственную предельную точку $x = 0$, которая принадлежит множеству, поэтому множество является замкнутым.

14. Да. Соединим прямолинейным отрезком точку множества D с точкой, ему не принадлежащей. Легко видеть, что на этом отрезке найдётся не менее одной граничной точки.

15. Все точки сферы, и только они, являются граничными точками сферы. Внутренних точек сфера как подмножество $\mathbb{R}^m$ не имеет. Дополнение к сфере является объединением открытых множеств и, следовательно, является открытым множеством. Но тогда сфера представляет собой замкнутое множество.

16. Множество граничных точек есть отрезок $[0, 1]$. Внешних точек это множество не имеет.

17. Граничными точками являются две точки $A(a, 0)$ и $B(b, 0)$. Замыканием является отрезок $\bar{I} = \{(x, 0) \mid a \leq x \leq b\}$. Внешние точки образуют множество $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{I}$.

18. Внутренних точек у этого множества нет. Граничными точками являются точки отрезка $[a, b]$. Замыканием является отрезок $[a, b]$; $\text{ext } G = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$.

19. Граница множества иррациональных чисел есть $\mathbb{R}^1$.

20. Например, окружность $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = a^2\}$.

21. Например, два смежных отрезка $A = [a, b]$, $B = [b, c]$. В самом деле, $\text{int}(A \cup B) = (a, c)$, в то время как $\text{int } A \cup \text{int } B = (a, b) \cup (b, c)$.

22. Например, множество всех точек плоскости с рациональными координатами. Границей множества является вся плоскость $\mathbb{R}^2$.

23. Например, множество D , состоящее из точек открытого круга $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, имеющих рациональные координаты. Границей такого множества является замкнутый круг $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Очевидно, что $D \subset \partial D$.

24. Дополнение к канторову множеству — счётное объединение интервалов. Оно открыто. Значит, канторово множество замкнуто. Канторово множество имеет мощность континуум. Канторово множество является необычным замкнутым множеством в том смысле, что оно полностью состоит из граничных точек и нигде не является плотным.

25. Да, например, гипербола $y^2 - x^2 = 1$ и её асимптота $y = x$. Для доказательства отметим, что, во-первых, оба множества являются замкнутыми и не пересекаются. Во-вторых, покажем, что расстояние между ними равно 0. Выберем две последовательности точек, одна из которых $M_n(n, \sqrt{n^2 + 1})$ принадлежит множеству A , а другая $N_n(n, n)$ принадлежит множеству B . Тогда расстояние между соответствующими точками этих последовательностей

$$\rho(M_n, N_n) = \sqrt{(n - n)^2 + (\sqrt{n^2 + 1} - n)^2} = \sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$.

26. Например, два открытых круга $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ и $\{(x, y) \mid (x - 2)^2 + y^2 < 1\}$.

27. Имеем: $D(u) = \{|x| \leq 1, |y| \geq 1\}$ (изобразите это множество на плоскости Oxy самостоятельно).

28. Согласно определению арксинуса, должны выполняться оба соотношения $\left|\frac{x}{y}\right| \leq 1$ и $\left|\frac{y}{x}\right| \leq 1$, из которых следует $|y| = |x|$, или $y = \pm x$, т. е. областью определения служит объединение биссектрис всех координатных углов без начала координат — точки $(0, 0)$.

29. Имеем: $\begin{cases} y \geq 0, \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y \leq 0, \\ \sin x \leq 0 \end{cases}$ и т. д.

30. Область определения функции задаётся системой

$$\begin{cases} |x| + |y - 1| \leq 1, \\ |x - 2| + |y - 1| \leq 1. \end{cases}$$

Построив на плоскости данную фигуру, убеждаемся, что это два квадрата, имеющие единственную общую точку $(1, 1)$. Следовательно, функция определена в одной точке и множество её значений состоит из одного числа 0.

31. Так как арккосинус определён на отрезке $[-1, 1]$, то приходим к ограничению $|x + 2y + 3z| \leq 1$. То есть функция определена на пересечении двух полупространств $x + 2y + 3z + 1 \geq 0$, $x + 2y + 3z - 1 \leq 0$, ограниченных параллельными плоскостями. Что касается области значений функции, то арккосинус неотрицательного аргумента принимает значения из отрезка $[0, \frac{\pi}{2}]$.

32. Так как арксинус определен на отрезке $[-1, 1]$, а $2^{\ln(\sqrt[4]{1+x+y+z})} \geq 1$, то функция определена лишь в точках плоскости $x + y + z = 0$.

33. Функцию можно упростить, учитывая, что $\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1$. Таким образом, область определения данной функции – это открытый шар $x^2 + y^2 + z^2 < 9$, из которого удалена сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

34. Функцию можно упростить, учитывая, что $\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \alpha = \frac{\pi}{2}$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$. В силу определения нулевой степени, имеем ограничение $xyz \neq 0$. То есть функция определена на всём пространстве, за исключением трёх координатных плоскостей.

35. Область определения задаётся неравенством $-1 - x^2 - y^2 + z^2 > 0$, т. е. $x^2 + y^2 - z^2 < -1$. Это внутренность двуполостного гиперболоида.

36. Преобразуем две последние дроби:

$$\frac{1}{1+y+yz} = \frac{x}{x+xy+xyz} = \frac{x}{x+xy+1};$$

$$\frac{1}{1+z+zx} = \frac{xy}{xy+xyz+x^2yz} = \frac{xy}{xy+1+x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } f(x, y, z) &= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = \\ &= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+1} + \frac{xy}{xy+1+x} \equiv 1. \end{aligned}$$

Функция принимает единственное значение, равное 1.

37. Искомое множество совпадает со множеством значений z , при которых разрешима относительно x, y совокупность

$$\begin{cases} z - y = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6}, \\ z - y = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(z - y)^2 = -6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6 \Leftrightarrow 6x^2 + 18xy + (z - y)^2 + 14y^2 - 6 = 0.$$

Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно x . Оно имеет решения тогда и только тогда, когда его дискриминант

$$D = (18y)^2 - 4 \cdot 6 \cdot ((z - y)^2 + 14y^2 - 6) \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 4yz + 2z^2 - 12 \leq 0.$$

Рассматривая это неравенство как квадратное относительно y , находим, что оно имеет решения тогда и только тогда, когда $D_1 = (-4z)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2z^2 - 12) \geq 0 \Leftrightarrow z^2 \leq 18$.

Ответ: $z \in [-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$.

38. Поверхности уровня определяются уравнением $x + y + z = C$, это семейство параллельных между собой плоскостей $\frac{x}{C} + \frac{y}{C} + \frac{z}{C} = 1$.

39. Линии уровня определяются уравнением $x^2 - y^2 = C$. При $C = 0$ получаем пару прямых $y = \pm x$. При $C \neq 0$ это семейство гипербол.

40. Линии уровня функции $z = \min(x, y)$ определяются уравнением $\min(x, y) = C$. Раскроем понятие наименьшего из двух чисел:

$$\min(x, y) = C \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x, \\ x = C; \\ y < x, \\ y = C. \end{cases}$$

Изобразите на плоскости эти линии уровня самостоятельно.

41. Линии уровня функции определяются уравнением $\max(|x|, |y|) = C$ ($C \geq 0$). Раскроем понятие наибольшего из двух чисел:

$$\max(|x|, |y|) = C \Leftrightarrow \begin{cases} |y| \geq |x|, \\ |y| = C; \\ |y| < |x|, \\ |x| = C. \end{cases}$$

Изобразите на плоскости эти линии самостоятельно.

42. *Указание.* Линии уровня определяются уравнением $|x| + |y| - |x + y| = C$, $C \geq 0$. Приравнявая подмодульные выражения к нулю, получаем три линии: $x = 0$, $y = 0$, $y = -x$. Эти прямые разбивают всю плоскость на 6 областей (изобразите их). Раскрывая в каждой области модули, изображаем линии уровня (сделайте это самостоятельно).

43. Поверхности уровня задаются уравнением $\operatorname{arccotg}(x + 5y - z) = C$, где $C \in (0, \pi)$. Применяя функцию котенгенса, получаем: $x + 5y - z = \operatorname{ctg} C$ — это семейство параллельных плоскостей.

44. Здесь поверхностями уровня будут поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = C$, т. е. эллипсоиды с полуосями $2\sqrt{C}$, $3\sqrt{C}$, $4\sqrt{C}$.

45. Запишем уравнение поверхности уровня:

$$\arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C, \quad \text{где } C \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Преобразуем: $\frac{z^2}{x^2 + y^2} = \sin^2 C$. Тогда поверхностями уровня будет семейство конусов $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{\sin^2 C}$, $C \neq 0$.

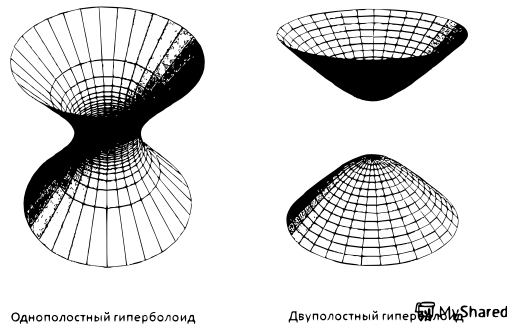
Гиперболоиды

Рис. 2: Однополостный и двуполостный гиперболоиды.

46. Уравнение поверхностей уровня имеет вид $x^2 + y^2 - z^2 = C$. Возможны три случая.

1) Если $C = 0$, то получаем $z^2 = x^2 + y^2$ – круговой конус (вращения).

2) Если $C > 0$, то приводя уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = C$ к каноническому виду $\frac{x^2}{(\sqrt{C})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{C})^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{C})^2} = 1$, определяем, что это семейство однополостных гиперболоидов.

3) Если же $C < 0$, то, умножая уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = C$ на (-1) и обозначая $\tilde{C} = -C$, приведём его к виду $-\frac{x^2}{(\sqrt{\tilde{C}})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{\tilde{C}})^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{\tilde{C}})^2} = 1$. Это уравнение задаёт семейство двуполостных гиперболоидов (Рис. 2).

47. Обозначим аргументы этой функции $u = x + y$, $v = \frac{x}{y}$. Выразим из этой системы x и y через u и v : $x = \frac{uv}{1+v}$, $y = \frac{u}{1+v}$. Подставив в функцию, получим

$$f(u, v) = x^2 - y^2 = \left(\frac{uv}{1+v} \right)^2 - \left(\frac{u}{1+v} \right)^2 = \frac{u^2(v-1)}{1+v}.$$

Ответ: $f(x, y) = \frac{x^2(y-1)}{1+y}$, $y \neq -1; 0$.

48. Если $y = 0$, то $z = x + 0 + f(x-0) = x + f(x) = x^2$, откуда $f(x) = x^2 - x$. Тогда $z = x + y + (x-y)^2 - (x-y) = 2y + (x-y)^2$.

49. По условию, 1) $f(x, 0) \equiv \text{const}$, $\forall x \in [0, 1]$, 2) $f(x_0, y) \equiv \text{const}$, $\forall y \in [0, 1]$. Возьмём две произвольные точки квадрата $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Из первого условия имеем: $f(x_1, y_1) = f(x_1, 0)$, а из второго имеем $f(x_2, y_2) = f(x_2, 0)$. Так как по первому условию $f(x_1, 0) = f(x_2, 0)$, то $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Таким

образом, в любых двух точках квадрата значения функции оказались равны, следовательно, функция постоянна на всём квадрате.

50. Пусть $x^2 + y^2 \neq 0$, сформулируем задачу в виде: найти все значения z , при которых уравнение $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ имеет решения (x, y) . Перепишем уравнение: $x^2(1 - z) = y^2(1 + z)$. Это уравнение имеет решения при условии, что числа $(1 - z)$ и $(1 + z)$ одного знака, т. е. $(1 - z)(1 + z) > 0 \Leftrightarrow z \in (-1, 1)$.

51. Пользуясь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим (Коши), получим

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{1 - x^2} + \frac{4}{4 - y^2} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{4}{4 - y^2}} = \frac{4}{\sqrt{5 - 4x^2 - y^2}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{1 - (2x - y)^2}} \geq 4, \end{aligned}$$

причём все неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2x = y, \\ |x| < 1, \quad |y| < 2, \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

52. Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся алгебраическим неравенством $\frac{|a||b|}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$ при $a = x$, $b = y^3$. Имеем $\left| \frac{xy^3}{x^2 + y^6} \right| \leq \frac{1}{2}$ при любых x, y одновременно не равных 0, откуда по определению следует ограниченность функции.

53. Обозначим $G = \{(x, y) \mid 16y^2 + x^2 = 4\}$. Разделив на 4, перепишем уравнение в виде $(2y)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1$ и сделаем тригонометрическую подстановку $\frac{x}{2} = \cos t$, $2y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, откуда $x = 2 \cos t$, $y = \frac{1}{2} \sin t$. Подставляя в функцию, получим $f(x, y) = \frac{1}{2} \sin 2t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Ответ: так как $E_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, то функция ограничена. $\inf_{(x, y) \in G} f(x, y) = -\frac{1}{2}$, $\sup_{(x, y) \in G} f(x, y) = \frac{1}{2}$.

54. 1-й способ. Это задача на условный экстремум, но покажем её решение средствами элементарной математики. Разделим уравнение на 16, приведя к виду $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$. Положим $x = 2 \cos t$, $y = 4 \sin t$, тогда

$$3x - 2y = 6 \cos t - 8 \sin t = 10 \left(\frac{3}{5} \cos t - \frac{4}{5} \sin t \right) = 10 \sin(\varphi - t),$$

где $\varphi = \arcsin \frac{3}{5}$. Наибольшее значение выражения равно 10.

2-й способ. Положим $a = 3x - 2y$, откуда $y = \frac{3x - a}{2}$. Подставив в уравнение, получим $25x^2 - 6ax + a^2 - 64 = 0$. Переформулируем задачу в виде: «При каких

а квадратное относительно x уравнение имеет решения»? Это выполняется тогда и только тогда, когда $D \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq 100$, откуда приходим к ответу.

55. Это задача на условный экстремум функции трёх переменных. Разберём её решение средствами элементарной математики. Преобразуем функцию к эквивалентному виду, удобному для нахождения наименьшего значения:

$$\begin{aligned} x^2 + 5y^2 + 8z^2 &= (x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 8yz) + (y^2 - 4yz + 4z^2) - \\ &\quad - 4(xy + xz + yz) = (x + 2y + 2z)^2 + (y - 2z)^2 + 4 \geq 4, \end{aligned}$$

причём наименьшее значение достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ y - 2z = 0, \\ xy + xz + yz = -1. \end{cases}$$

Эта система имеет решения, например $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{4}$.

56. Выделяя три полных квадрата, приводим функцию к виду $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (2y+3)^2 + (x-2z)^2 + 5 \geq 5$, причём наименьшее значение достигается $\Leftrightarrow x = 1$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.

57. 1-й способ. Перепишем функцию в виде

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2} = (x^2 - y^2)^2 + 2 \left(\frac{1}{x^2y^2} + x^2y^2 \right) \geq 4,$$

в силу неотрицательности полного квадрата и неравенства о сумме двух взаимно обратных положительных чисел. При этом наименьшее значение, равное 4, достигается, например, при $x = y = 1$.

2-й способ. Воспользуемся неравенством Коши для четырёх чисел $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ ($a, b, c, d \geq 0$):

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + \frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{x^2y^2} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{x^4 \cdot y^4 \cdot \frac{1}{x^2y^2} \cdot \frac{1}{x^2y^2}} = 4,$$

причём неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow x^4 = y^4 = \frac{1}{x^2y^2}$. Ответ: наименьшее значение равно 4 и достигается, например, при $x = y = 1$.

58. Перепишем функцию в виде $f(x, y) = x^2 + x^2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{x^6y^2}$ и воспользуемся неравенством Коши для пяти чисел:

$$f(x, y) \geq 5 \cdot \sqrt[5]{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot \frac{1}{x^6y^2}} = 5,$$

причём наименьшее значение, равное 5, достигается тогда и только тогда, когда $x^2 = y^2 = \frac{1}{x^6y^2}$ (легко убедиться в том, что эта система имеет решения).

59. Согласно неравенству Коши при $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ имеем

$$f(x, y, z) = \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y} \cdot \frac{yz}{x}} = 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} \geq 3 = \inf f = \min f,$$

т. к. $f(1, 1, 1) = 3$.

2 СЕМИНАР: Предел функции многих переменных (кратный, повторные)

*«Поэт должен видеть то, чего не видят другие.
И это же должен и математик».*

Софья Ковалевская (1850–1891) – российский математик и механик. Первая в Российской империи и Северной Европе женщина-профессор и первая в мире женщина — профессор математики.

**С целью защиты авторских прав
НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!**

2.1 Понятие m -кратного предела по Гейне и по Коши, повторных пределов

Для функций многих переменных понятие предела вводится во многом аналогично тому, как это делалось для функций одной переменной. Но так как количество независимых переменных возрастает, то и понятие предела усложняется за счёт увеличения размерности пространств этих переменных. Перейдём к определениям.

Понятие конечного предела по Коши в точке. Рассмотрим функцию $u = f(M)$, определённую на множестве D точек m -мерного евклидова пространства, и точку $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ) \in \mathbb{R}^m$, быть может и не принадлежащую множеству D , но обладающую тем свойством, что в любой δ -окрестности точки M_0 содержится хотя бы одна точка множества D , отличная от M_0 (т. е. M_0 является предельной точкой множества D).

Опр. 1 (предел функции в точке M_0 по Коши). Число b называется *пределом функции $u = f(M)$ в точке M_0* (или при $M \rightarrow M_0$), если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для любой точки M из множества D , удовлетворяющей условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, справедливо неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$. Обозначение:

$$b = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M), \quad \text{или} \quad b = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^\circ \\ \vdots \\ x_m \rightarrow x_m^\circ}} f(x_1, \dots, x_m).$$

Здесь все переменные $x_1, \dots, x_m$ одновременно и независимо друг от друга стремятся к своим предельным значениям $x_1^\circ, \dots, x_m^\circ$, т. е. точка M приближается к точке M_0 с любой стороны. Траектория стремления M к предельной точке предполагается произвольной (в частности, вдоль лучей, выходящих из

этой точки; можно также представить себе траектории, которые «закручиваются» вокруг предельной точки M_0 , асимптотически приближаясь к ней, и т. д.). Вспомним, что в случае функции одной действительной переменной $f(x)$ аргумент x может стремиться к своему предельному значению x_0 только вдоль единственной оси Ox — справа или слева. С этим в теории функций одной переменной связано существование односторонних пределов. Вместо односторонних пределов, в случае с функциями многих переменных мы имеем *кратные пределы* со стремлением точки M к точке M_0 вдоль *произвольной* траектории, ведущей в предельную точку.

Определение предела функции по Гейне в точке. Сформулируем теперь аналогичное определение предела функции в точке *по Гейне* при тех же предположениях об области определения функции и характере точки M_0 , что и выше.

Опр. 2 (*предел функции в точке M_0 по Гейне*). Число b называется *пределом функции $u = f(M)$ в точке M_0* (или при M , стремящемся к M_0), если для любой сходящейся к M_0 последовательности $\{M_n\}$ точек множества D , все элементы которой отличны от M_0 ($M_n \neq M_0$), соответствующая числовая последовательность $\{f(M_n)\}$ значений функции сходится к числу b .

При этом используют обозначения:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = b, \quad \text{или} \quad f(M) \rightarrow b \text{ при } M \rightarrow M_0.$$

Так как сходимость M к M_0 покомпонентная, то предел можно записать в развёрнутом виде m -кратного предела

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0 \\ \dots \\ x_m \rightarrow x_m^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b,$$

где переменные x_i одновременно и независимо друг от друга стремятся к своим пределам x_i^0 , $i = \overline{1, m}$.

Определения 1 и 2 эквивалентны.

Повторные пределы в точке. Наряду с определённым выше m -кратным пределом у функций нескольких переменных существуют так называемые *повторные пределы* (или *последовательные пределы*). Таких пределов не было в случае с функциями единственного аргумента. В повторных пределах нет одновременного стремления аргументов к своим предельным значениям. Вместо этого предельный переход осуществляется по каждому аргументу в отдельности по очереди, в том или ином порядке (при фиксированных остальных).

Например, для функций двух переменных $u = f(x, y)$ наряду с двойным пределом $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ существуют два повторных предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)) \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)).$$

В повторных пределах вначале всегда вычисляется «внутренний» предел, а уже затем находится «внешний» предел. Эти три предела не обязательно одновременно существуют и равны друг другу, поэтому, например, сводить задачу вычисления двойного предела к вычислению одного из повторных в общем случае нельзя. Это демонстрирует следующий пример.

Пример 47. Показать, что для функции $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ оба повторных предела в точке $(0, 0)$ существуют и равны нулю: $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$, а двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не существует.

Решение. Вычислим первый из повторных пределов. Так как при $x \neq 0$ имеем $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$. Аналогично доказывается, что второй из повторных пределов также равен нулю. Чтобы показать, что двойной предел не существует, рассмотрим две последовательности точек: $M'_k(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ и $M''_k(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})$. Очевидно, что обе последовательности сходятся к точке $(0, 0)$, но при этом соответствующие последовательности значений функции сходятся при $k \rightarrow +\infty$ к различным предельным значениям: $f(M'_k) \rightarrow 1$, $f(M''_k) \rightarrow 0$, что противоречит единственности предела. $\square$

Пример 48. Найти двойной и повторные пределы в точке $(0, 0)$ функции

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Решение. Очевидно, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$, а также повторный предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$, в то время как другой повторный предел $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ не существует. $\square$

Пример 49. Найти двойной и повторные пределы в точке $(0, 0)$ функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 - y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Для повторных пределов имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1,$$

а вот двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не существует, так как если $x = 0$, $y \neq 0$, $y \rightarrow 0$, то предел равен (-1) , а если $y = 0$, $x \neq 0$, $x \rightarrow 0$, то предел равен 1 . $\square$

Приведённые примеры говорят о том, что кратный и повторные пределы далеко не всегда одновременно существуют и равны друг другу.

Рассмотрим **геометрический смысл повторных пределов** в сравнении с двойным пределом для функции $f(x, y)$ двух переменных. При вычислении предела $\lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y))$ точка (x, y) с фиксированным $y \neq b$ сначала движется параллельно оси абсцисс ($x \rightarrow a$), и лишь достигнув значения $x = a$, продолжает движение под прямым углом параллельно оси ординат (по прямой $x = a$) до достижения значения $y = b$ (сделайте рисунок). А при вычислении второго из повторных пределов $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y))$, наоборот, точка (x, y) с фиксированным $x \neq a$ сначала движется параллельно оси ординат ($y \rightarrow b$), и достигнув значения $y = b$, продолжает движение под прямым углом параллельно оси абсцисс (вдоль прямой $y = b$) до достижения значения $x = a$. То есть это два разных пути приближения точки (x, y) к предельной точке (a, b) , где допустимы только движения вдоль координатных осей. В случае же двойного предела способ приближения (x, y) к предельной точке (a, b) произволен.

Теорема (о связи между двойным и повторными пределами). Если:

- 1) *существует (конечный или нет) двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$,*
- 2) *для любого y существует (конечный) простой предел по x : $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$, то существует повторный предел*

$$\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y))$$

и равен двойному.

- 3) *Если, дополнительно, для любого x существует (конечный) простой предел по y : $\psi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$, то существует также и второй повторный предел*

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)).$$

В этом случае оба повторных предела равны между собой и равны двойному.

Следствие. Если повторные пределы существуют, конечны, но не равны между собой, то двойной предел не существует.

Другие виды пределов. В случае функций многих переменных, как и в случае с функцией одной переменной, могут встретиться конечные и бесконечные пределы в ситуациях, когда одна или несколько переменных стремятся к бесконечности с определённым знаком или без него.

Пример 50. Например, $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{1}{\ln(xy)} + \frac{y}{e^y} \right) = 0. \square$

Приведём соответствующие определения для функции двух переменных.

1. Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве D при сколь угодно больших положительных значениях своих переменных (в точках, «далёких» от начала координат $O(0, 0)$, и при этом расположенных в первой четверти координатной плоскости). Обозначим через $M \in D$ текущую точку с координатами (x, y) , где $x > 0, y > 0$.

Опр. 3 (*предел функции при $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$ по Коши*). Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции $f(x, y)$ при $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$* , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: как только $\rho(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2} > \delta$, то $|f(x, y) - b| < \varepsilon$. Обозначение:

$$b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y).$$

2. Введём понятие предела функции при $M(x, y) \rightarrow \infty$. Для этого предположим, что множество D , на котором задана функция $u = f(x, y)$, для любого (сколь угодно большого) $\delta > 0$ имеет хотя бы один элемент M , лежащий вне круга радиуса δ с центром в точке $O(0, 0)$. Для простоты будем считать, что функция $f(x, y)$ определена на всей плоскости $|x| < +\infty, |y| < +\infty$ (или в окрестности $x^2 + y^2 \geq a^2$ бесконечно удалённой точки).

Опр. 4 (*предел функции при $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ по Коши*). Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции $u = f(x, y)$ при $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$* , если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех точек $M(x, y)$ из множества D , удовлетворяющих условию $\rho(M, O) = \sqrt{x^2 + y^2} > \delta$, справедливо неравенство $|f(x, y) - b| < \varepsilon$. Этот факт обозначают следующим образом:

$$b = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y).$$

Замечание. Используя в общем случае для множественного аргумента функции f векторное обозначение $x = (x_1, \dots, x_m)$, а для нормы $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$, условие $\rho(O, M) > \delta$ можно представить в эквивалентном виде $\|x\| > \delta$. Условие $x \rightarrow \infty$ будем понимать как $\|x\| \rightarrow +\infty$. Тогда предел $b = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_m \rightarrow \infty}} f(x_1, \dots, x_m)$ примет более простой и привычный вид

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

3. Сформулируем, наконец, понятие бесконечного предела в точке.

Опр. 5 (*бесконечного предела функции в точке M_0 по Коши*). Говорят, что функция $u = f(M)$ имеет *бесконечный предел* при $M \rightarrow M_0$, если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех точек $M \in D$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta$,

справедливо неравенство $|f(M)| > E$. Обозначения:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \infty, \quad \text{или} \quad f(M) \rightarrow \infty \text{ при } M \rightarrow M_0.$$

2.2 Критерий Коши существования предела функции t переменных

Все теоремы о свойствах пределов, с которыми мы ознакомились при работе с функциями одной переменной (в том числе об арифметических операциях над функциями, имеющими пределы), естественным образом обобщаются на случай функций нескольких переменных. Для примера покажем, как формулируется для функций многих переменных критерий Коши существования предела функции в точке.

Будем говорить, что функция t переменных $f(M)$ удовлетворяет *условию Коши* в точке M_0 (соответственно, при $M \rightarrow \infty$), если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительно число δ такое, что для любых двух точек M' и M'' из множества D задания функции, удовлетворяющих условиям $0 < \rho(M', M_0) < \delta$, $0 < \rho(M'', M_0) < \delta$ (соответственно, условиям $\rho(M', O) > \delta$, $\rho(M'', O) > \delta$), справедливо неравенство $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$.

Теорема (*критерий Коши существования предела функции t переменных*). Для того чтобы функция $f(M)$ имела конечный предел в точке M_0 (соответственно, при $M \rightarrow \infty$), необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла в точке M_0 (при $M \rightarrow \infty$) условию Коши.

Аналогично обобщаются понятия бесконечно малой и бесконечно большой функций и другие понятия.

2.3 Арифметические операции над функциями t переменных, имеющими предел

«Философы веками спорили – возможно ли невербальное мышление. Брауэр¹ показал, что математика – полностью автономный, находящий основание в себе самом вид деятельности, не зависящий от языка. Идеи математики уходят в разум куда глубже, чем язык. Они не зависят от словесного восприятия и куда богаче его. Естественный язык способен, по Брауэру, создать лишь копию идей, соотносимую с ней самой, как фотография с пейзажем».

Ваннах Михаил Александрович (1908–1997), живописец, член Союза художников СССР.

¹Лёйтзен Эгберт Ян Брауэр (нидерл. Luitzen Egbertus Jan Brouwer; 1881–1966) – голландский философ и математик, работавший в таких областях математики как топология, теория множеств, математическая логика, теория меры и комплексный анализ.

Теорема об арифметических операциях над функциями t переменных, имеющими предел в заданной точке, доказывается полностью аналогично тому, как это делается в случае функций одной переменной. Приведём соответствующую теорему.

Теорема (*арифметические операции над функциями t переменных, имеющими предел*). Пусть две функции $u = f(M)$ и $u = g(M)$ заданы на одном и том же множестве D и имеют в точке M_0 (предельная точка множества D) пределы, соответственно равные b и c . Тогда функции

$$f(M) + g(M), f(M) - g(M), f(M) \cdot g(M), f(M)/g(M)$$

также имеют в точке M_0 пределы, соответственно равные $b + c$, $b - c$, $b \cdot c$, b/c (в случае частного дополнительно требуем $c \neq 0$).

2.4 Бесконечно малые и бесконечно большие функции t переменных и их асимптотическое сравнение

«Он стал поэтом – для математика у него не хватало фантазии».

Давид Гильберт (1862–1943, немецкий математик–универсал, внёс значительный вклад в развитие многих областей математики) об одном из своих учеников.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Так же как и для функций одной действительной переменной, для функций многих переменных можно ввести понятия бесконечно малых и бесконечно больших в точке функций.

Так, функция $u = f(M)$ называется *бесконечно малой в точке M_0* (или при $M \rightarrow \infty$), если $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 0$ (соответственно, $\lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = 0$). Функция $u = f(M)$ называется *бесконечно большой в точке M_0* (при $M \rightarrow \infty$), если $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \infty$ (соответственно, $\lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = \infty$).¹

Пример 51. Показать, что функция $u = \frac{1}{x^2 + y^4}$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$, и является бесконечно большой функцией при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

Решение. Данная функция является бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$, поскольку её предел $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{1}{x^2 + y^4} = 0$. С другой стороны, так как $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^2 + y^4} = +\infty$, то функция является бесконечно большой при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$. $\square$

¹Обозначение бесконечно малой в точке M_0 функции: $f(M) = o(1)$ при $M \rightarrow M_0$.

Пример 52. Примером бесконечно малой в точке M_0 функции является функция

$$f(M) = (x_1 - x_1^\circ)^{n_1} + (x_2 - x_2^\circ)^{n_2} + \dots + (x_m - x_m^\circ)^{n_m},$$

где $n_1, n_2, \dots, n_m$ – положительные числа. $\square$

Специальное представление функции, имеющей конечный предел в точке. Если функция $u = f(M)$ имеет равное b предельное значение в точке M_0 , то функция $\alpha(M) = f(M) - b$ является бесконечно малой в точке M_0 . Используя этот результат, получаем *специальное представление* для функции, имеющей в точке M_0 предел, равный b :

$$f(M) = b + \alpha(M), \quad \text{где} \quad \lim_{M \rightarrow M_0} \alpha(M) = 0.$$

Сравнение бесконечно малых функций t переменных. Аналогично тому, как это делалось для функций одной действительной переменной, можно выполнять сравнение двух бесконечно малых (бесконечно больших) в одной точке функций.

Пусть $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ – две функции, заданные на одном и том же множестве и обе являющиеся бесконечно малыми в точке M_0 .

1. Говорят, что $\alpha(M)$ является в точке M_0 бесконечно малой *более высокого порядка* малости, чем $\beta(M)$, если

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\alpha(M)}{\beta(M)} = 0.$$

Обозначение: $\alpha(M) = o(\beta(M))$ (читается «о»–малое).

Символ $o(\beta(M))$ обозначает любую бесконечно малую в данной точке функцию, имеющую более высокий порядок малости по сравнению с бесконечно малой функцией $\beta(M)$. То есть $o(\beta(M))$ – это целый класс функций, которому принадлежит конкретная функция $\alpha(M)$. Поэтому в этих равенствах нельзя менять местами левую и правую части (они не обладают свойством коммутативности). Такие понятия используются, например, в формулах Тейлора, где различные функции аппроксимируются алгебраическими многочленами, а остаточный член может быть записан в форме Пеано, подразумевающей использование символа «о»–малое.

Приведём некоторые свойства символа «о»–малое, известные вам по функциям одной переменной:

- $o(\beta(M)) \pm o(\beta(M)) = o(\beta(M))$;
- если $\gamma = o(\beta(M))$, то $o(\beta(M)) + o(\gamma(M)) = o(\beta(M))$;
- если $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ – любые две бесконечно малые в точке M_0 функции, то $\alpha \cdot \beta = o(\alpha(M))$, $\alpha \cdot \beta = o(\beta(M))$.

2. Говорят, что бесконечно малые при $M \rightarrow M_0$ функции $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ (не обращающиеся в нуль в окрестности точки M_0) имеют в точке M_0 *один порядок* малости, если

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\alpha(M)}{\beta(M)} = C, \quad C \neq 0.$$

Обозначение: $\alpha(M) = O^*(\beta(M))$. В частности, если

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\alpha(M)}{\beta(M)} = 1,$$

то функции $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ называются *эквивалентными* бесконечно малыми в точке M_0 , что обозначается $\alpha(M) \sim \beta(M)$.

Пример 53. Поскольку $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$, то имеем две эквивалентные между собой бесконечно малые функции: $\sin(xy) \sim xy$. $\square$

Заметим, что не всегда можно сравнить асимптотически (по скорости стремления к нулю в заданной точке) любые две бесконечно малые функции.

Пример 54. Рассмотрим две бесконечно малые в точке $(0, 0)$ функции

$$\alpha(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \beta(x, y) = x^2 + y^2.$$

Они не сравнимы, так как не существует предел их отношения

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}. \quad \square$$

Аналогично сравниваются две бесконечно большие в данной точке функции с той лишь разницей, что словосочетание «более высокого порядка малости» следует заменить на словосочетание «более высокого порядка роста».

2.5 Приёмы вычисления кратных пределов

«Математика включает в себе не только истину, но и высочайшую красоту – красоту холодную и строгую, подобную красоте скульптуры».

Бертран Рассел (1872–1970) — граф, британский философ, логик, математик и общественный деятель.

Поскольку любой предел вида $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ можно свести заменой $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$ к пределу $\lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow 0 \\ \bar{y} \rightarrow 0}} f(\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$, вычисляемому в точке $(0, 0)$, то

далее, в основном, будем рассматривать в качестве предельной точки (x_0, y_0) точку начала координат $(0, 0)$. Рассмотренные ниже приёмы используются для раскрытия неопределённостей в пределах функций многих переменных.

1. Если необходимо доказать равенство нулю предела функции нескольких переменных $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$, то можно попробовать оценить модуль выражения под знаком предела сверху некоторым выражением, стремящимся к нулю при $M \rightarrow M_0$. Согласно принципу двусторонней ограниченности, исходный предел будет также равен нулю. Для построения такого рода оценок можно, в том числе, привлекать различные известные неравенства.

Пример 55. Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

Решение. Для раскрытия имеющейся неопределённости оценим функцию под знаком предела при помощи неравенства $\frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$, верного для всех $a, b \in \mathbb{R}$, одновременно не равных нулю:

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |x| \cdot \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|}{2}.$$

Поскольку $\frac{|x|}{2} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, то исследуемый предел равен нулю. $\square$

2. Если необходимо доказать, что предел функции нескольких переменных не существует, то можно попытаться подобрать две различные последовательности точек M'_n и M''_n , сходящиеся к предельной точке M_0 , но при этом дающие различные предельные значения функции.

Пример 56. Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Решение. Рассмотрим две последовательности точек $M'_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ и $M''_n(\frac{2}{n}, \frac{1}{n})$, сходящиеся при $n \rightarrow +\infty$ к точке $(0, 0)$. При этом $f(M'_n) = f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$, а $f(M''_n) = f(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{2}{5} \rightarrow \frac{2}{5}$. Если бы данный предел существовал, то мы должны были получить одинаковые предельные значения по этим последовательностям. Так как они оказались разными, то это означает, что предел не существует.

Можно было оформить решение иначе (при этом общая идея остается прежней). Если $y = x$, т. е. точка (x, y) приближается к началу координат вдоль этой прямой, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. Если же приближаться к точке $(0, 0)$ по траектории $y = \frac{x}{2}$, то получим другое предельное значение: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x}{2}}{x^2 + (\frac{x}{2})^2} = \frac{2}{5}$. Нарушается принцип единственности предела. $\square$

3. Использование теоремы о связи между двойными и повторными пределами (например, для доказательства того, что предел не существует).

Пример 57. Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

Решение. *1-й способ.* Вычислим повторные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2 + y^3}{y^2} = -1.$$

Оба повторных предела существуют, конечны, но не равны между собой. По следствию из теоремы о связи между двойными и повторными пределами это означает, что исходный двойной предел не существует.

2-й способ. Вычислим предел вдоль прямых $y = kx$, проходящих через предельную точку:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x^2 - (kx)^2 + x^3 + (kx)^3}{x^2 + (kx)^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

Получили, что при разных значениях k получаются различные предельные значения. Следовательно, данный предел не существует. $\square$

4. Иногда вычисление предела от функции двух переменных упрощается, если перейти в нём от прямоугольных координат (x, y) к *полярным координатам* (r, φ) . Так, вычисление двойного предела $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ сводится в результате замены $x = x_0 + r \cos \varphi$, $y = y_0 + r \sin \varphi$ к вычислению обычного (однократного) предела

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} f(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi)$$

при $r \rightarrow 0$ (независимо от $\varphi(r)$!). Здесь $\varphi(r)$ – произвольная функция, т. е. стремление к точке $(0, 0)$ происходит по произвольной траектории, а не только, скажем, вдоль фиксированных лучей $\varphi = \varphi_0$. Если окажется, что значение предела зависит от φ , то данный предел не существует.

Пример 58. Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

Решение. Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{(r \cdot \cos \varphi)^2 \cdot r \sin \varphi}{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{r^3 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi}{r^2} = \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi}} (r \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi) = 0, \end{aligned}$$

поскольку $|\cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi| \leq 1$, т. е. функция $\cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi$ ограничена при любых $\varphi = \varphi(r)$. $\square$

Рассмотрим ещё два примера. Обратите внимание, как в них используется приём перехода к полярным координатам.

Пример 59. Показать, что предел функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^2 = 0, \end{cases}$$

в точке $(0, 0)$ существует вдоль любой прямой $y = kx$, проходящей через эту точку, но при этом не существует двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$.

Решение. *1-й способ.* Если подставить под знаком предела вместо y выражение kx , то получим, что вдоль этих лучей предел существует и равен $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot kx}{x^4 + (kx)^2} = 0$. Но если приближаться к точке $(0, 0)$ по траектории $y = kx^2$, то результатом будет значение $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot kx^2}{x^4 + (kx^2)^2} = \frac{k}{1 + k^2}$, зависящее от k . Это означает, что предел не существует.

2-й способ. Перейдём к полярным координатам:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{r^2 \cos^2 \varphi \cdot r \sin \varphi}{r^4 \cos^4 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{r \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi}{r^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi}.$$

Ясно, что если зафиксировать произвольное $\varphi = \varphi_0$ (соответствует произвольному лучу $y = kx$), то полученный предел

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi = \varphi_0}} \frac{r \cos^2 \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0}{r^2 \cos^4 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0} = 0$$

(поскольку, если $\sin \varphi_0 = 0$, то это очевидно, а если $\sin \varphi_0 \neq 0$, то числитель дроби стремится к нулю, а знаменатель – нет).

Покажем, что, тем не менее, значение предела зависит от выбора φ . Положим (при достаточно малых r) $\varphi = \arcsin r$, тогда получим

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi = \arcsin r}} \frac{r(1 - r^2) \cdot r}{r^2(1 - r^2)^2 + r^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi = \arcsin r}} \frac{1 - r^2}{(1 - r^2)^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, данный предел не существует. $\square$

Пример 60. Существует ли предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$?

Решение. *1-й способ.* Мы уже рассматривали этот пример выше, и показали, что предел не существует. Заметим, что можно было рассмотреть другие две последовательности точек $M'_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ и $M''_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$, где $n \in \mathbb{N}$. Обе последовательности сходятся к точке $(0, 0)$ при $n \rightarrow +\infty$. Вместе с тем, соответствующие последовательности значений функции сходятся к различным значениям:

$$f(M'_n) = \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 1 \rightarrow 1, \quad f(M''_n) = \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \rightarrow 0,$$

что противоречит определению предела по Гейне.

2-й способ. Перейдём к совмещённым полярным координатам:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{2r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi}{(r \cdot \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi}} (2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi}} (\sin 2\varphi).$$

Очевидно, значение полученного предела существенно зависит от выбора φ , следовательно, данный предел не существует. $\square$

5. При вычислении пределов функций трёх переменных используются свои приёмы. Так, можно переходить к пространственным *сферическим координатам* (r, θ, φ) (обобщение полярных координат на случай трёх переменных). Формулы перехода (в случае, когда предел вычисляется в точке $(0, 0, 0)$) имеют вид:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Здесь $r \geq 0$ – расстояние от начала координат до заданной точки $M(x, y, z)$, $0 \leq \theta \leq \pi$ – угол между осью Oz и отрезком, соединяющим начало координат и точку M (аксиальный угол), $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ – угол между осью Ox и проекцией отрезка, соединяющего начало координат с точкой M , на плоскость Oxy (полярный угол) (Рис. 3). При этом $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. В результате имеем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} f(x, y, z) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \theta = \theta(r) \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta),$$

где $\theta(r), \varphi(r)$ – любые функции такие, что $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Пример 61. Вычислить тройной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|xyz|}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Решение. Положим $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$, тогда

$$0 \leq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|xyz|}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \theta, \varphi}} \frac{\sqrt{|r \sin \theta \cos \varphi \cdot r \sin \theta \sin \varphi \cdot r \cos \theta|}}{r} =$$

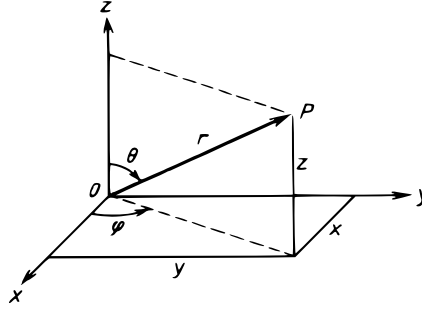


Рис. 3: Сферическая система координат в пространстве

$$= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \theta, \varphi}} \sqrt{r |\sin \theta \cos \varphi \cdot \sin \theta \sin \varphi \cdot \cos \theta|} \leq \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \theta, \varphi}} \sqrt{r} = 0.$$

Следовательно, данный предел равен нулю. $\square$

6. При вычислении тройных пределов в точке $(0, 0, 0)$ можно делать замену $x = r \cos \alpha$, $y = r \cos \beta$, $z = r \cos \gamma$, где α, β, γ – углы, образованные радиус-вектором точки $M(x, y, z)$ с положительными направлениями осей Ox , Oy , Oz соответственно, при этом направляющие косинусы радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ имеют вид

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

В результате имеем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} f(x, y, z) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \alpha, \beta, \gamma}} f(r \cos \alpha, r \cos \beta, r \cos \gamma).$$

Если данный предел существует, он должен принимать одно и то же значение при любых $\alpha(r)$, $\beta(r)$, $\gamma(r)$, удовлетворяющих условию $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Пример 62. Вычислить тройной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|xyz|}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Решение. Положим $x = r \cos \alpha$, $y = r \cos \beta$, $z = r \cos \gamma$, тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \sqrt{\frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \alpha, \beta, \gamma}} \sqrt{\frac{r^3 |\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma|}{r^2}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \alpha, \beta, \gamma}} \sqrt{r |\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma|} = 0$$

как произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию. $\square$

7. Замена переменных в пределе. В простых случаях вычисление кратного предела удаётся свести к нахождению предела от функции *одной переменной*.

Пример 63. Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$.

Решение. Обозначим $t = x + y$, тогда $t \rightarrow 0$ и в силу 1-го замечательного предела получим:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1. \quad \square$$

Пример 64. Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy}$.

Решение. Сделаем замену $t = xy$ и воспользуемся 1-м замечательным пределом $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$. Получим, что искомый предел равен 1. $\square$

Рассмотрим более интересный случай с двойной заменой.

Пример 65. Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{\operatorname{tg}(x+y) \cdot e^{x-y}}{x^2 - y^2}$.

Решение. Перепишем предел в виде $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{\operatorname{tg}(x+y) \cdot e^{x-y}}{(x+y)(x-y)}$ и сделаем двойную подстановку $u = x + y$, $v = x - y$, тогда предел примет вид

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ v \rightarrow 2}} \left(\frac{\operatorname{tg} u}{u} \cdot \frac{e^v}{v} \right).$$

Переменные разделились и задача оказалась сведена к произведению двух пределов, каждый из которых зависит от своей переменной:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} \cdot \lim_{v \rightarrow 2} \frac{e^v}{v} = 1 \cdot \frac{e^2}{2}. \quad \square$$

8. Самый простой случай – когда функция нескольких переменных является непрерывной в точке M_0 , и тогда

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

Пример 66. Найти предел функции $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (xy\sqrt{1+xy^2})$.

Решение. Имеем $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (xy\sqrt{1+xy^2}) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (xy) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{1+xy^2} = 0 \cdot 1 = 0$.

Здесь применяется свойство «предел произведения равен произведению пределов», причём каждый из двух сомножителей является непрерывной функцией переменных x и y . $\square$

2.6 Задачи для самостоятельного решения

«Кто с детских лет занимается математикой, тот развивает внимание, тренирует свой мозг, свою волю, воспитывает настойчивость и упорство в достижении цели».

А. Маркушевич (1908–1979) — советский математик и педагог. Автор работ по теории функций, педагогике и методике преподавания математики, истории науки.

Задачи на повторные пределы:

№60. Показать, что повторные пределы функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ существуют, но не равны:

$$f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}.$$

№61. Показать, что один из повторных пределов в точке $(0, 0)$ существует, а другой – нет:

$$f(x, y) = \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}.$$

№62. [8, № 3184(г)] Найти повторные пределы $\lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y))$, $\lim_{y \rightarrow \infty}(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$, если $f(x, y) = \frac{1}{xy} \cdot \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}$.

№63. [8, № 3182, аналог] Показать, что для функции

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

повторные пределы в точке $(0, 0)$ существуют и равны нулю

$$\lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0}(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0,$$

а двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не существует.

№64. [8, № 3181] Показать, что для функции $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ существуют оба повторных предела, не равных между собой:

$$\lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0}(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = -1,$$

в то время как двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не существует.

№65. [8, № 3183] Показать, что для функции

$$f(x, y) = (x + y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$$

оба повторных предела $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$ и $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ не существуют, тем не менее существует двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ и он равен нулю.

№66. Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Показать, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$, однако второй из повторных пределов $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$ не существует.

№67. Пусть $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + (x - y)^4}$. Показать, что $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y)$ не существует, но $\lim_{y \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y))$.

№68. [10, с. 21] Вычислить двойной и повторные пределы для функции

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{x + y} \quad \text{при } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0.$$

№69. [10, с. 21] Вычислить предел при $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^4}, & x^2 + y^4 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^4 = 0, \end{cases}$$

Используя разные приёмы, решить задачи на вычисление пределов:

№70. Показать, что предел функции

$$z(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^2 = 0, \end{cases}$$

в точке $(0, 0)$ существует вдоль любой прямой $y = kx$, проходящей через эту точку, но при этом не существует двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} z(x, y)$.

№71. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y};$

№72. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x - y}{x^3 - y^3};$

$$\text{№73. } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 2x - 2xy - 4y};$$

$$\text{№74. } [8, \text{№ 3187}] \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin(xy)}{x};$$

$$\text{№75. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1};$$

$$\text{№76. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3 - \sqrt{xy+9}}{xy};$$

$$\text{№77. } [3, \text{№ 3004}] \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2};$$

$$\text{№78. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{1 - \sqrt[3]{1+xy}};$$

$$\text{№79. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (xy \ln(xy));$$

$$\text{№80. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + xy^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}};$$

$$\text{№81. } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(2xy)}{x^2y};$$

$$\text{№82. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\text{№83. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4};$$

$$\text{№84. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2};$$

$$\text{№85. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};$$

$$\text{№86. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2} \right);$$

$$\text{№87. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x}{x+y^3};$$

$$\text{№88. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^5}{x^4+y^4};$$

$$\text{№89. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+2y}{y-x^2};$$

$$\text{№90. } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}};$$

$$\text{№91. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}};$$

$$\text{№92. } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(1 + \frac{2}{3x^2 + y^2}\right)^{xy};$$

$$\text{№93. } [8, \text{№ 3185}] \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2};$$

$$\text{№94. } [8, \text{№ 3188}] \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)};$$

$$\text{№95. } [8, \text{№ 3190}] \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2};$$

$$\text{№96. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x^2 y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\text{№97. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^4} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\text{№98. } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln^2(x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}};$$

$$\text{№99. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)};$$

$$\text{№100. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\arcsin(x^4 y)}{x^4 + y^2};$$

$$\text{№101. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 + \sin xy)}{\operatorname{arctg}(3x^2)};$$

$$\text{№102. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sin(xy) - \sin(xy^2)}{xy - x};$$

$$\text{№103. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xy + z}{xy - z}.$$

№104. Верно ли в достаточно малой окрестности точки $(0, 0)$ равенство

$$\sin(-xy^3 + 7y^5) = o(\rho^2), \quad \text{где } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}?$$

№105. Является ли бесконечно малой в точке $(1, 1)$ функция

$$\text{а) } f(x, y) = \frac{x - 1}{y}; \quad \text{б) } f(x, y) = \frac{x - 1}{y - 1} ?$$

№106. Пусть $f(x, y) = xy \cdot \exp(-(y - x^2)^2)$. Показать, что $f(x, y) \rightarrow 0$, когда точка (x, y) стремится к ∞ , оставаясь на фиксированном луче $x = t \cos \alpha$, $y = t \sin \alpha$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, $t \rightarrow +\infty$, но $f(x, y)$ не является бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$.

2.7 Ответы и решения

60. Вычислим один из повторных пределов:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{x} = 1.$$

С другой стороны,

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y + y^2}{y} = -1.$$

61. Вычислим один из повторных пределов:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x} + y}{x + y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}.$$

Очевидно, он не существует. Теперь вычислим другой предел:

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x} + y}{x + y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1.$$

62. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{xy} \cdot \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right) &= 0, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{xy} \cdot \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + xy} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}}{\frac{xy}{1 + xy}} \right) = 1. \end{aligned}$$

63. Вычислим первый из повторных пределов. Так как при $x \neq 0$ имеем $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$. Аналогично доказывается, что второй из повторных пределов также равен нулю. В случае двойного предела сведём его вычисление к эквивалентной задаче вычисления двойного предела более простой функции

$$g(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

Но последний двойной предел не существует, так как последовательности $M'_k(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ и $M''_k(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})$ сходятся к точке $(0, 0)$, а соответствующие последовательности значений функции сходятся при $k \rightarrow +\infty$ к различным предельным значениям: $f(M'_k) \rightarrow 1$, $f(M''_k) \rightarrow 0$.

64. Поскольку $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = 1$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = 1$. Далее, поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = -1$, то $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = -1$.

Возьмём теперь две последовательности $M'_n \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$ и $M''_n \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right)$ – обе сходятся к точке $(0, 0)$ при $n \rightarrow +\infty$. Однако $f(M'_n) = f \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = 0 \rightarrow 0$, $f(M''_n) = f \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$. Следовательно, двойной предел не существует.

65. Зафиксируем $x \neq \frac{1}{\pi n}$ ($n \in \mathbb{N}$), тогда $x \cdot \sin \frac{1}{x} \neq 0$, и рассмотрим предел $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left((x + y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} \right)$. Выберем две последовательности точек $M'_k \left(x, \frac{1}{\pi k} \right)$ и $M''_k \left(x, \frac{2}{\pi(4k+1)} \right)$, сходящиеся к точке $(0, 0)$. Тогда для первой последовательности имеем:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (k \rightarrow +\infty)}} \left(\left(x + \frac{1}{\pi k} \right) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \pi k \right) = 0,$$

а для второй

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (k \rightarrow +\infty)}} \left(\left(x + \frac{2}{\pi(4k+1)} \right) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \right) = x \cdot \sin \frac{1}{x} \neq 0.$$

Так как пределы оказались различны (при одном и том же фиксированном $x \neq \frac{1}{\pi n}$), то, следовательно, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ не существует. Аналогично доказывается, что второй из пределов $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ также не существует. Из этого вытекает, что оба повторных предела не существуют. Однако из неравенства

$$0 \leq \left| (x + y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|,$$

справедливом при всех $x \neq 0, y \neq 0$, следует, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left((x + y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} \right) = 0.$$

66. Имеем $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left((x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{y} \right) = 0$ как предел произведения бесконечно малой функции $(x^2 + y^2)$ и ограниченной $\sin \frac{1}{y}$. Далее, $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left((x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{y} \right) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(y^2 \cdot \sin \frac{1}{y} \right) = 0$. Наконец, рассмотрим второй из повторных пределов $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \left((x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{y} \right) \right)$. Он не существует, т. к. не существует внутренний предел.

67. Указание: рассмотреть $f(x, x)$ и $f(x, 0)$.

68. Вычислим двойной предел. В частном случае, когда $y = kx$, имеем $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{y}{x} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{x+y} \right) = k \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{1+k}$, следовательно, двойной предел не существует.

При этом повторные пределы существуют, конечны, но не равны:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y}{x} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{x+y} \right) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{y}{x} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{x+y} \right) = 1.$$

69. Пределы $f(x, y)$ вдоль кривых $y = x$ и $y = \sqrt{x}$ равны, соответственно, $f(x, x) = \frac{2x^3}{x^2 + x^4} \rightarrow 0$, $f(x, \sqrt{x}) = \frac{x^3 + x^2}{2x^2} \rightarrow \infty$. Так как они не совпадают, то двойной предел не существует. Вычисление повторных пределов даёт

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^4} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^4} = \infty.$$

70. Решение задачи разобрано в качестве примера в тексте пособия.

71. Если положить $y = x$, тогда $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x} = 0$. Однако если приближаться к точке $(0, 0)$ вдоль траектории $y = -x + x^2$, то получим другой результат: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-x + x^2)}{x^2} = -1$, что означает, что данный предел не существует.

72. Разложим знаменатель по формуле разности кубов:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\cancel{x-y}}{(\cancel{x-y})(x^2+xy+y^2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{3}.$$

73. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим общий множитель, являющийся причиной неопределённости:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^2 - (2y)^2}{x(x-2y) + 2(x-2y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\cancel{(x-2y)}(x+2y)}{\cancel{(x-2y)}(x+2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x+2y}{x+2} = 1.$$

74. Выделим первый замечательный предел:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \left(\frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{y \rightarrow a} y = 1 \cdot a = a.$$

75. Умножим и разделим на сопряжённое выражение:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sqrt{xy+1}+1) = 2.$$

76. Для раскрытия неопределённости умножим и разделим дробь на выражение, сопряжённое к числителю:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3 - \sqrt{xy+9}}{xy} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(3 - \sqrt{xy+9}) \cdot (3 + \sqrt{xy+9})}{xy(3 + \sqrt{xy+9})} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{-xy}{xy(3 + \sqrt{xy+9})} = - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{3 + \sqrt{xy+9}} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

77. Для раскрытия неопределённости умножим и разделим дробь на выражение, сопряжённое к числителю, а затем перейдём к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(\sqrt{x^2y^2+1}-1)(\sqrt{x^2y^2+1}+1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2y^2+1}+1)} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2y^2+1}+1)} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Перейдём к совмещённым полярным координатам:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{1}{4} \frac{r^4 \sin^2 2\varphi}{r^2} = \frac{1}{4} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} (r^2 \sin^2 2\varphi) = 0,$$

так как функция $\sin^2 2\varphi$ ограничена $\forall \varphi = \varphi(r)$.

78. Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое к знаменателю:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{1 - \sqrt[3]{1+xy}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy \left(1 + \sqrt[3]{1+xy} + \sqrt[3]{(1+xy)^2}\right)}{(1 - \sqrt[3]{1+xy})(1 + \sqrt[3]{1+xy} + \sqrt[3]{(1+xy)^2})} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(1+1+1)}{1^3 - (\sqrt[3]{1+xy})^3} = -3. \end{aligned}$$

79. Положим $t = xy$, тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (xy \ln xy) = \lim_{t \rightarrow 0} (t \ln t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}}.$$

По правилу Лопиталья: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\ln t)'}{(\frac{1}{t})'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = - \lim_{t \rightarrow 0} t = 0.$

80. Выделим 2-й замечательный предел:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + xy^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left((1 + xy^2)^{\frac{1}{xy^2}} \right)^{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}.$$

Выражение $(1 + xy^2)^{\frac{1}{xy^2}} \rightarrow e$, а выражение $\frac{xy^2}{x^2+y^2} \rightarrow 0$, т. к. $\left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| = |y| \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{|y|}{2}$. Поэтому предел равен $e^0 = 1$.

81. Поскольку $\operatorname{tg}(2xy) \sim 2xy$ при $x \rightarrow 1, y \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(2xy)}{x^2y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2y} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x} = 2.$$

82. Так как $|\sin(xy)| \leq |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, то

$$0 \leq \left| \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что данный предел равен нулю.

83. Очевидно, функция терпит разрыв в точке $(0, 0)$. Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi}} \frac{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2}{(r \cos \varphi)^4 + (r \sin \varphi)^4} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{1}{r^2(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)} = \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{1}{r^2((\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 - 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)} = \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{1}{r^2((\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi)} = \frac{1}{+0} = +\infty. \end{aligned}$$

84. Полагая $y = x$, приходим к пределу $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^4}{x^4 + x^2} = 1$,

а полагая $y = x^2$, получаем $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^8}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^6}{2x^2} = +\infty$.

Следовательно, предел в точке $(0, 0)$ не существует.

85. Выполним подстановку $y = kx$, тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x^2 - (kx)^2}{x^2 + (kx)^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

Так как результат зависит от параметра k , то предел не существует.

86. Оценим функцию под знаком предела. В силу ограниченности синуса имеем:

$$\left| \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Но так как $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, то исходный предел равен нулю.

87. Подставим $y = kx$, тогда $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{3x}{x + (kx)^3} = 3$. Но если взять $x = 0$, а $y \neq 0$, $y \rightarrow 0$, то $\lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{0}{0 + y^3} = 0$. Следовательно, предел не существует.

88. Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^5}{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2} &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi}} \frac{r^5 \cos^5 \varphi}{r^4 - 2r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi}} \frac{r^5 \cos^5 \varphi}{r^4 (1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi)} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi}} \frac{r \cos^5 \varphi}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi} = 0, \end{aligned}$$

поскольку $\left| \frac{\cos^5 \varphi}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi} \right| \leq 2$ при всех $\varphi(r)$.

89. Если $y = 0$, $x \rightarrow 0$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{x^2 + 2y}{y - x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{x^2}{-x^2} = -1$. Но если взять $x = 0$, $y \rightarrow 0$, то $\lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + 2y}{y - x^2} = \lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2y}{y} = 2$. Предел не существует.

90. Обозначим $t = 1/x$ и рассмотрим предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \left(\frac{x^2}{x + y} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{\ln(1 + t)}{t(1 + ty)} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{1}{1 + ty} = 1.$$

Тогда для исходного предела получим

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}}} = e.$$

91. Имеем неопределённость 1^∞ . Выделим второй замечательный предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left((1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 y^2}} \right)^{-\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{-\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}} = e^{-\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}} = e^{-0} = 1.$$

92. Имеем неопределённость $1^{+\infty}$. Выделим второй замечательный предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(1 + \frac{2}{3x^2 + y^2}\right)^{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\left(1 + \frac{2}{3x^2 + y^2}\right)^{\frac{3x^2 + y^2}{2}}\right)^{\frac{2xy}{3x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} e^{\frac{2xy}{3x^2 + y^2}}.$$

В силу непрерывности экспоненциальной функции знак предела можно перенести в показатель степени. Вычислим предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{2xy}{3x^2 + y^2}.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \forall \varphi(r)}} \frac{2r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2(3 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \forall \varphi(r)}} \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{3 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}.$$

Результат зависит от полярного угла, поэтому данный предел (а значит, и исходный предел) не существует.

93. *1-й способ.* Разделим числитель и знаменатель дроби xy ($xy \neq 0$, так как $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$): $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}}$. Если числа x и y одного знака, то в силу неравенства $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ($a > 0$), знаменатель дроби $\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x} \geq 1$, а числитель стремится к нулю. Если же x и y разных знаков, то в силу неравенства $a + \frac{1}{a} \leq -2$ ($a < 0$), знаменатель дроби $\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x} \leq -3$, а числитель стремится к нулю. Поэтому предел в обоих случаях равен 0.

2-й способ. Пользуясь очевидным неравенством $x^2 - xy + y^2 \geq xy$, получим (при $x \neq 0$, $y \neq 0$):

$$0 \leq \left| \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq \left| \frac{x + y}{xy} \right| \leq \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|},$$

откуда следует равенство предела нулю.

3-й способ. Перейдём к полярным координатам:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \forall \varphi}} \frac{r(\cos \varphi + \sin \varphi)}{r^2(\cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi)} = 0,$$

т. к. $\frac{1}{r} \rightarrow 0$, а функция $\frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi}$ ограничена (докажите).

94. 1-й способ. Перейдём к полярным координатам:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)} = \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} r^2 e^{-r(\cos \varphi + \sin \varphi)}.$$

Поскольку $x \rightarrow +\infty$ и $y \rightarrow +\infty$, то это означает, что φ принадлежит I четверти, где $\cos \varphi > 0$, $\sin \varphi > 0$. Но тогда показатель степени у экспоненты стремится к $-\infty$, а значит, сама экспонента — к нулю, и искомый предел равен 0.

2-й способ. Сделаем замену $t = x + y$ и так как $x > 0$, $y > 0$, то имеем оценку $x^2 + y^2 \leq (x + y)^2$. Следовательно, $0 \leq (x^2 + y^2) e^{-(x+y)} < t^2 e^{-t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, поэтому исходный предел равен 0.

3-й способ. Имеем оценку при $x > 0$, $y > 0$:

$$\frac{x^2 + y^2}{e^{x+y}} = \frac{x^2}{e^{x+y}} + \frac{y^2}{e^{x+y}} \leq \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}.$$

Поскольку $\frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0$, $\frac{y^2}{e^y} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$, то предел равен нулю.

95. Имеем неопределённость 0^0 . Перейдём к совмещённым полярным координатам:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} (r^2)^{r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = e^{\lim_{r \rightarrow 0} (2r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \cdot \ln r)} = e^0 = 1$$

при всех $\varphi = \varphi(r)$.

96. Перейдём к совмещённым полярным координатам и воспользуемся соотношением эквивалентности $\ln(1 + t) \sim t$ при $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x^2 y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^2 y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{\sqrt[3]{r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}}{r} = \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \sqrt[3]{r} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4} \sin^2 2\varphi} = 0, \end{aligned}$$

так как $\left| \sqrt[3]{\frac{1}{4} \sin^2 2\varphi} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ при всех $\varphi = \varphi(r)$.

97. Перейдём к совмещённым полярным координатам:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^4} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{\sqrt[3]{r^3 \cos^3 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi} - r \cos \varphi}{r} =$$

$$= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \left(\sqrt[3]{\cos^3 \varphi + r \sin^4 \varphi} - \cos \varphi \right) = 0,$$

поскольку в силу непрерывности функции кубического корня выражение $\sqrt[3]{\cos^3(\varphi(r)) + r \sin^4(\varphi(r))}$ в окрестности точки $r = 0$ можно представить в виде $\cos(\varphi(r)) + o(1)$, где $o(1)$ – бесконечно малая при $r \rightarrow 0$ функция (даже если предел $\cos \varphi(r)$ при $r \rightarrow 0$ не существует, например, $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ (траектория асимптотически «закручивается» вокруг точки).

98. Поскольку $x + y \rightarrow 1$, то $\ln(x + y) \sim x + y - 1$. Перейдём к полярным координатам $x - 1 = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln^2(x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{((x - 1) + y)^2}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}} = \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{(r \cos \varphi + r \sin \varphi)^2}{r} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} r(\cos \varphi + \sin \varphi)^2 = 0, \end{aligned}$$

поскольку $(\cos \varphi + \sin \varphi)^2 \leq 2$ при любых $\varphi = \varphi(r)$.

99. Переходя к полярным координатам, получаем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)} = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{r}{\ln(1 - r^2)} \stackrel{[\text{Л}]}{=} \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{\frac{1}{1-r^2} \cdot (-2r)} = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1 - r^2}{-2r} = -\infty.$$

100. Воспользуемся тем, что $\arcsin t \sim t$ при $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\arcsin(x^4 y)}{x^4 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y}{x^4 + y^2}.$$

Последний предел равен нулю, как следует из неравенства

$$\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2} : \quad \left| \frac{x^4 y}{x^4 + y^2} \right| = x^2 \cdot \left| \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{x^2}{2}.$$

101. Поскольку $xy \rightarrow 0$ и $\sin xy \rightarrow 0$, то $\ln(1 + \sin xy) \sim \sin xy \sim xy$. Поскольку $3x^2 \rightarrow 0$, то $\arctg(3x^2) \sim 3x^2$. В результате имеем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 + \sin xy)}{\arctg(3x^2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y}{x}.$$

Положим, в частности, $y = kx$, тогда предел равен $\frac{k}{3}$ и, так как результат зависит от k , то предел не существует.

102. Применяя формулу разности синусов, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sin(xy) - \sin(xy^2)}{xy - x} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{2 \sin \frac{xy - xy^2}{2} \cos \frac{xy + xy^2}{2}}{xy - x} = \\ (\text{так как } \sin \frac{xy - xy^2}{2} &\sim \frac{xy - xy^2}{2}, \cos \frac{xy + xy^2}{2} \sim 1) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy - xy^2}{xy - x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy(1 - y)}{x(y - 1)} = -1. \end{aligned}$$

103. Пусть $x = y = 0$, $z \neq 0$, $z \rightarrow 0$, тогда $\lim_{\substack{x=y=0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{0+z}{0-z} = -1$. Если же $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z = 0$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z=0}} \frac{xy+0}{xy-0} = 1$.

Так как предельные значения зависят от способа стремления x, y, z к нулю, то данный предел не существует.

104. В малой окрестности точки $(0, 0)$ имеем: $\sin(-xy^3 + 7y^5) \sim -xy^3 + 7y^5$, поэтому достаточно доказать, что $-xy^3 + 7y^5 = o(\rho^2)$, т. е. что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{-xy^3 + 7y^5}{x^2 + y^2} = 0.$$

В самом деле, оценим модуль выражения под знаком предела:

$$\left| \frac{-xy^3 + 7y^5}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{-xy^3}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{7y^5}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{-xy^3}{y^2} \right| + \left| \frac{7y^5}{y^2} \right| = |xy| + 7|y^3|.$$

Поскольку $|xy| \rightarrow 0$, $7|y^3| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, то исходное равенство верно.

105. а) Для ответа на вопрос достаточно вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x-1}{y} = 0$,

следовательно, функция является бесконечно малой.

б) Если положить $x = 1 + t^4$, $y = 1 + t^2$, то получим

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x-1}{y-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{t^2} = 0,$$

но если, например, взять $x = 1 + t^2$, $y = 1 + t^4$, то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x-1}{y-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^4} = +\infty,$$

что означает, что предел не существует.

106. Указание: рассмотреть $f(x, x^2)$.

3 СЕМИНАР: Непрерывность и равномерная непрерывность функции многих переменных

На вопрос Григорию Перельману, почему он отказался от \$1 000 000, присуждённого ему институтом Клэя в 2010 году за доказательство гипотезы Пуанкаре – загадки тысячелетия, которая не поддавалась никому более 100 лет, тот ответил:

*«Я знаю, как управлять Вселенной.
И скажите — зачем же мне бежать за миллионом?»*

С целью защиты авторских прав **НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!**

С увеличением у функции количества переменных возникает разделение понятий непрерывности в точке по совокупности всех переменных и по каждой из переменных в отдельности, которые совпадают в случае функции одной переменной.

3.1 Непрерывность по совокупности переменных и по каждой из переменных в отдельности

Непрерывность функции m переменных по совокупности переменных. Пусть $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$ – некоторая точка $\mathbb{R}^m$, принадлежащая области определения D функции $u = f(M)$ и являющаяся одновременно предельной точкой для множества D . Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной в точке M_0* , если (кратный) предел этой функции в точке M_0 существует и равен значению функции $f(M_0)$ в этой точке:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0), \quad \text{или} \quad f(M) \rightarrow f(M_0) \text{ при } M \rightarrow M_0,$$

или, в покомпонентном (развёрнутом) виде,

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^\circ \\ \dots \\ x_m \rightarrow x_m^\circ}} f(x_1, \dots, x_m) = f(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ).$$

Обратим внимание, что непрерывность функции $f(M)$ в точке M_0 означает возможность предельного перехода под знаком функции:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f\left(\lim_{M \rightarrow M_0} M\right).$$

Точки пространства $\mathbb{R}^m$, в которых нарушается свойство непрерывности, называются *точками разрыва* функции. Говоря о точках разрыва, можно использовать фразу «функция *терпит разрыв* в точке». Точки разрыва функции многих переменных могут быть не только изолированными, но и заполнять собою линии, поверхности и т. п.

Раскрывая понятие предела, сформулируем эти определения на языке последовательностей (по Гейне) и на языке « $\varepsilon - \delta$ » (по Коши).

Опр. 1 (*непрерывность функции в точке по Гейне*). Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной в точке* M_0 , если для любой сходящейся к M_0 последовательности $\{M_n\}$ точек множества D соответствующая последовательность $\{f(M_n)\}$ значений этой функции сходится к числу $f(M_0)$.

Опр. 1* (*непрерывность функции в точке по Коши*). Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной в точке* M_0 , если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для любой точки M из множества D , удовлетворяющей условию $\rho(M, M_0) < \delta$, справедливо неравенство $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.

Эти определения эквивалентны.

Можно привести ещё два определения непрерывности функции нескольких переменных $f(M)$ в заданной точке, эквивалентные двум предыдущим.

Опр. 1** (*непрерывность функции в точке на языке окрестностей*). Функция $f(M)$ называется *непрерывной в точке* M_0 , если для любой (сколь угодно малой) окрестности точки $f(M_0)$ пространства $\mathbb{E}^1$ найдётся такая окрестность точки M_0 пространства $\mathbb{E}^m$, что образ всех точек (из области определения функции), лежащих в этой окрестности точки M_0 , при отображении, осуществляемом функцией f , целиком лежит в указанной окрестности точки $f(M_0)$.

Опр. 1*** (*непрерывность в точке в разностной форме*). Назовём *полным приращением функции*¹ $f(M)$ в точке M_0 функцию Δu , определяемую формулой

$$\Delta u(M_0) = f(M) - f(M_0),$$

где M – любая точка из области задания функции. Используя приращения аргументов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ в точке M_0 , можно записать полное приращение функции в виде

$$\Delta u(M_0) = f(x_1^\circ + \Delta x_1, \dots, x_m^\circ + \Delta x_m) - f(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ).$$

Очевидно, для непрерывности функции в точке M_0 необходимо и достаточно, чтобы её приращение $\Delta u(M_0)$ в этой точке представляло собой бесконечно

¹т. е. по всем переменным сразу.

малую в точке M_0 функцию, т. е. чтобы

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \Delta u(M_0) = 0.$$

Это условие часто называют *разностной формой* условия непрерывности функции в точке M_0 .

Определим теперь понятие непрерывности функции на множестве точек, и затем перейдём к примерам.

Опр. 2 (непрерывность функции на множестве). Функция $u = f(M)$, определённая на множестве D , называется *непрерывной на этом множестве*, если она непрерывна в каждой точке множества D .¹

Пример 67. Функция $u = x^2y + 2 \arctg(x - y)$ является непрерывной на плоскости $\mathbb{R}^2$, а функция $u = \frac{1}{xy}$ разрывна в точках, у которых или $x = 0$, или $y = 0$, т. е. в точках, лежащих на координатных осях. $\square$

Пример 68. Найти точки разрыва функции $u(x, y) = \frac{xy}{x + y}$.

Решение. Функция не определена при $x + y = 0$, следовательно, точки разрыва заполняют собой прямую $y = -x$. $\square$

Пример 69. Для функции $u(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ точка $(0, 0)$ является точкой устранимого разрыва. Доопределив функцию в этой точке предельным значением, равным 0, получим непрерывную в точке $(0, 0)$ функцию. $\square$

Пример 70. Для функции $u(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$ поверхностью разрыва является сфера с центром в начале координат и радиусом 3. $\square$

Пример 71. Функции двух переменных

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}, \quad g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

имеют разрывы: первая – вдоль прямых $y = \pm x$, вторая – вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$. Для функций трёх переменных

$$f(x, y, z) = \frac{x + 2y - 5z}{xy - z}, \quad g(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$$

разрывы заполняют в первом случае гиперболический параболоид $z = xy$, а во втором – конус $z^2 = x^2 + y^2$. $\square$

¹В этом случае любая точка множества D должна являться его предельной точкой.

Непрерывность функции m переменных по каждой из переменных. Мы сформулировали понятие непрерывности функции в точке *по совокупности* всех переменных. Однако для функций многих переменных существует понятие непрерывности по каждой из переменных в отдельности, когда все переменные, кроме одной, фиксируются, и полученная функция одной оставшейся переменной удовлетворяет условию непрерывности по этой переменной.

Приведём это определение и покажем, как связаны между собой непрерывность по совокупности всех переменных с непрерывностью по каждой из переменных.

Чтобы ввести понятие непрерывности в точке по одной переменной (пусть это будет x_k , $1 \leq k \leq m$), зафиксируем все переменные, кроме x_k , равными соответствующим координатам $x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_{k-1}^\circ, x_{k+1}^\circ, \dots, x_m^\circ$ точки M_0 , и рассмотрим *частное приращение функции* $f(M)$ в точке $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$ по этой переменной:

$$\Delta_k u(M_0) = f(x_1^\circ, \dots, x_{k-1}^\circ, x_k^\circ + \Delta x_k, x_{k+1}^\circ, \dots, x_m^\circ) - \\ - f(x_1^\circ, \dots, x_{k-1}^\circ, x_k^\circ, x_{k+1}^\circ, \dots, x_m^\circ)$$

(мы оставили свободной только переменную x_k).

Опр. 3 (непрерывность в точке по k -й переменной). Функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ называется *непрерывной в точке M_0 по переменной x_k* , если

$$\lim_{x_k \rightarrow x_k^\circ} f(x_1^\circ, \dots, x_{k-1}^\circ, x_k, x_{k+1}^\circ, \dots, x_m^\circ) = f(x_1^\circ, \dots, x_{k-1}^\circ, x_k^\circ, x_{k+1}^\circ, \dots, x_m^\circ).$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} f(x_1^\circ, \dots, x_{k-1}^\circ, x_k^\circ + \Delta x_k, x_{k+1}^\circ, \dots, x_m^\circ) = f(x_1^\circ, \dots, x_{k-1}^\circ, x_k^\circ, x_{k+1}^\circ, \dots, x_m^\circ),$$

где Δx_k – приращение по k -му аргументу (k -й переменной).

Используя понятие *частного приращения* функции по k -й переменной в точке M_0 , последнее определение можно сформулировать в следующем виде.

Опр. 3*. Функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ называется *непрерывной в точке $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$ по переменной x_k* , если

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_k u(M_0) = 0,$$

т. е. частное приращение $\Delta_k u$ этой функции в точке M_0 представляет собой бесконечно малую функцию от Δx_k .

Замечание. При фиксированных значениях всех переменных, кроме переменной x_k , функция $u = f(M)$ представляет собой функцию одной этой переменной. Поэтому непрерывность функции по переменной x_k означает непрерывность указанной функции одной переменной.

Так, для функции двух переменных $f(x, y)$ непрерывность в точке $M_0(x_0, y_0)$ по совокупности переменных означает, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

непрерывность по переменной x означает, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0),$$

а непрерывность в этой точке по переменной y означает, что

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0).$$

Геометрический смысл непрерывности на примере функций двух переменных. Для функции $u = f(x, y)$ непрерывность в точке $M_0(x_0, y_0)$ по совокупности переменных означает, что с какой бы стороны и по какой бы траектории точка $M(x, y)$ на плоскости Oxy ни приближалась к точке M_0 (с любой стороны и по любой траектории, включая произвольно закручивающиеся вокруг этой точки линии), её предел существует и равен одному и тому же числу – значению функции $f(x_0, y_0)$.

В то же время непрерывность $f(x, y)$ по переменной x в точке M_0 означает непрерывность вдоль горизонтальной прямой $y = y_0$ – как функции $f(x, y_0)$ одной переменной x . При этом точка $M(x, y_0)$ может приближаться к точке $M_0(x_0, y_0)$ лишь справа или слева (свобода движения точки ограничена этой прямой). Когда же речь идёт о непрерывности в точке M_0 по переменной y (при фиксированном $x = x_0$), то это непрерывность функции одной переменной $f(x_0, y)$ вдоль вертикальной прямой $x = x_0$, когда точка $M(x_0, y)$ стремится к точке M_0 сверху или снизу.

Следующий пример показывает, что из того, что функция двух переменных непрерывна на любой прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) , не следует, вообще говоря, что функция непрерывна в указанной точке.

Пример 72. Доказать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^4 + y^2 = 0, \end{cases}$$

непрерывна на любой прямой, проходящей через точку $(0, 0)$, но, тем не менее, она не является непрерывной в данной точке.

Решение. В самом деле, значения этой функции на прямых $y = kx$ ($k \neq 0$) равны $\frac{kx}{x^2 + k^2}$, и поэтому $f(x, kx) \rightarrow 0 = f(0, 0)$ при $x \rightarrow 0$. Непрерывность этой функции

на осях Ox и Oy следует из того, что её значения на этих осях равны 0. Однако, если, например, стремиться к точке $(0, 0)$ по параболе $y = px^2$, то значения функции постоянны и равны $\frac{p}{1+p^2}$, и поэтому предельное значение функции при стремлении точки (x, y) по указанной параболе также равно $\frac{p}{1+p^2}$. Так как при $p \neq 0$ этот предел отличен от нуля и не совпадает со значением функции в точке $(0, 0)$, то функция разрывна в этой точке. $\square$

Теорема 1 (о связи между непрерывностью по совокупности переменных и по каждой из переменных). Из непрерывности функции в заданной точке (по совокупности переменных) следует непрерывность этой функции по каждой из переменных. Обратное утверждение неверно: из непрерывности функции по каждой из переменных не следует, вообще говоря, непрерывность по совокупности всех переменных.

Следствие. Если функция в какой-либо точке разрывна по одной из переменных, то она уже не может быть непрерывной в этой точке (по совокупности переменных).

Пример 73. Доказать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

непрерывна в точке $(0, 0)$ по каждой из переменных x и y , но не является непрерывной по совокупности двух переменных в этой точке.

Решение. 1) Исследуем функцию на непрерывность в $(0, 0)$ по переменной x . Выпишем условие непрерывности: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = f(0, 0)$, т. е. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0 = f(0, 0)$. Поскольку условие выполняется, то это означает, что функция непрерывна по переменной x .

Аналогично исследуем функцию на непрерывность в точке $(0, 0)$ по переменной y . Условие $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = f(0, 0)$ выполняется, так как $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$, что означает непрерывность функции по переменной y .

2) Покажем, что, тем не менее, функция не будет непрерывной в указанной точке. В самом деле, выберем в качестве траектории, по которой точка M приближается к $(0, 0)$, прямую вида $y = x$. Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0),$$

т. е. функция разрывна в точке $(0, 0)$. $\square$

Пример 74. Исследовать функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & x^2 + y^4 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^4 = 0, \end{cases}$$

в точке $(0, 0)$ на непрерывность по каждой переменной и по совокупности переменных.

Решение. Покажем, что функция непрерывна в точке $(0, 0)$ по переменной x :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{x \cdot 0^2}{x^2 + 0^4} = 0 = f(0, 0).$$

Аналогично получаем, что функция непрерывна в точке $(0, 0)$ и по переменной y :

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{0 \cdot y^2}{0^2 + y^4} = 0 = f(0, 0).$$

Однако функция не является непрерывной в этой точке по совокупности переменных. Действительно, если положить $x = y$, то получим

$$\lim_{\substack{x=y \\ y \rightarrow 0}} \frac{y^3}{y^2 + y^4} = 0.$$

Но если взять $x = y^2$, то получим уже другой результат:

$$\lim_{\substack{x=y^2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Забегаая вперёд, отметим **связь между непрерывностью функции в точке и её дифференцируемостью в этой точке**.¹

Теорема 2 (*достаточное условие непрерывности функции в точке*). Если функция нескольких переменных дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Приведём одно достаточное условие непрерывности функций на множестве.

Теорема 3 (*непрерывность липшицевых функций*). Пусть на некотором множестве $D \in \mathbb{R}^m$ задана функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, причём существует константа L (называемая константой Липшица) такая, что для любых $M', M'' \in D$ выполняется неравенство $|f(M') - f(M'')| \leq L \cdot \rho(M', M'')$.² Тогда функция f непрерывна на D .

¹Понятие дифференцируемости рассматривается на следующем семинаре. Тем не менее, для полноты изложения мы приводим эту теорему сейчас.

²В этом случае говорят, что функция $f(M)$ удовлетворяет на D *условию Липшица*.

«Доказательство называется строгим, если таковым его считает большинство математиков».

непрерывна в точке $N(t_1, \dots, t_k)$, а функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ непрерывна в соответствующей точке $M(x_1, \dots, x_m)$, где $x_i = x_i(N)$, $i = \overline{1, m}$, то сложная функция вида $u = f(x_1(N), \dots, x_m(N))$ также непрерывна в точке N .

Теорема 3 (*об устойчивости знака непрерывной в точке функции*). Если функция $u = f(M)$ непрерывна в точке M_0 евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, причём $f(M_0) \neq 0$, то существует такая окрестность этой точки, в пределах которой $f(M)$ не обращается в нуль и имеет знак, совпадающий со знаком $f(M_0)$.

Теорема 4 (*о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение*). Пусть функция $u = f(M)$ непрерывна во всех точках связного¹ множества D , причём $f(M_1)$ и $f(M_2)$ – значения функции в точках M_1 и M_2 этого множества. Пусть, далее, C – любое число, заключённое между $f(M_1)$ и $f(M_2)$. Тогда на любой непрерывной кривой, соединяющей точки M_1 и M_2 и целиком располагающейся в D , найдётся точка N такая, что $f(N) = C$.

Пример 75. Функция $z = \frac{1}{2x + y}$ определена и непрерывна во всех точках плоскости Oxy , за исключением точек, лежащих на прямой $2x + y = 0$. В точке $M_1(1, 1)$ эта функция положительна; в точке $M_2(-1, -1)$ она принимает отрицательное значение. Однако в области определения функции нет ни одной точки, в которой бы функция обращалась в нуль.

Кажущееся противоречие с теоремой 4 объясняется тем, что область, в которой непрерывна функция $z = \frac{1}{2x + y}$, не является связной: точки M_1 и M_2 , лежащие по разные стороны прямой $2x + y = 0$, нельзя соединить линией, целиком лежащей в области непрерывности функции. $\square$

Теорема 5 (*1-я теорема Вейерштрасса*). Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве² (т. е. компакте) D евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, то она ограничена на этом множестве.

Для формулировки 2-й теоремы Вейерштрасса необходимо напомнить понятие точных граней функции нескольких переменных. *Точной верхней гранью* функции $u = f(M)$ на множестве D называется такое число $\bar{u}$, обозначаемое $\sup_{M \in D} f(M)$ (чи-

тается «супрёмум»), которое удовлетворяет двум требованиям:

- 1) $f(M) \leq \bar{u}$ для всех точек M множества D ;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся хотя бы одна точка M из множества D , для которой $f(M) > \bar{u} - \varepsilon$.

Аналогично определяется *точная нижняя грань* $\underline{u} = \inf_{M \in D} f(M)$ (читается «инфимум») функции $u = f(M)$ на множестве D .

Можно сказать иначе: точной верхней (точной нижней) гранью функции $u = f(M)$ на множестве D называется наименьшая (соответственно, наибольшая) из верхних (соответственно, нижних) граней этой функции на заданном множестве.

¹Множество D евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ называется *связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

²Которое может быть и несвязным.

Теорема 6 (*2-я теорема Вейерштрасса*). Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве D , то она достигает на этом множестве своих точных нижней и верхней граней, т. е. среди точек множества D найдутся такие точки M_1 и M_2 , что значение $f(M_1)$ равно точной верхней грани функции $f(M)$ на множестве D , а значение $f(M_2)$ равно точной нижней грани функции $f(M)$ на D .

Теорема 7 (*непрерывная функция переводит компакт в компакт*). Пусть $f \in C(D)$ и множество K является компактом в D , то множество $f(K)$ также является компактом в $f(D)$.

Теорема 8 (*критерий непрерывности функции*). Функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, непрерывна на D тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества в $f(D)$ является открытым множеством в D .

Теорема 9 (*непрерывная функция переводит связное множество в связное*). Если $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, непрерывна на D и множество $P \subset D$ связно, то множество $f(P)$ тоже связно.

Конечно, этими теоремами не исчерпываются все свойства непрерывных отображений. Например, в этот список можно включить следующее утверждение. Сформулируем его в простом случае функции двух переменных.

Теорема 10 (*о непрерывности операции ортогонального проектирования*). Пусть на декартовой плоскости задано непустое множество D , и каждой точке этого множества ставится в соответствие его ортогональная проекция на ось Ox . Тогда полученное отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно.

3.3 Равномерная непрерывность функций m переменных. Теорема Кантора и 11 теорем о равномерной непрерывности функций

«Математика — это язык, на котором написана книга природы».

Галилео Галилей (1564–1642) — итальянский физик, механик, астроном, философ, математик.

В дополнение к рассмотренным выше видам непрерывности функций нескольких переменных, обратимся к такому важному типу непрерывности, как равномерная непрерывность, с которой вы познакомились при изучении функций одной переменной.

Опр. 1 (*равномерно непрерывной на множестве функции*). Функция $f(M)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве D евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное δ , зависящее только от ε , что для любых двух точек

$M', M'' \in D$, удовлетворяющих условию $\rho(M', M'') < \delta$, справедливо неравенство $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$.

Все основные теоремы о свойствах равномерно непрерывных функций обобщаются на случай функций многих переменных. Сформулируем некоторые из них.

Теорема 1 (о связи равномерной непрерывности и непрерывности на множестве). Если функция равномерно непрерывна на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^m$, то она непрерывна на этом множестве. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Разрывная на множестве D функция не может быть равномерно непрерывна на нём.

Теорема 2 (многомерный аналог теоремы Кантора). Если функция $u = f(M)$ определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}^m$ (компакте), то она равномерно непрерывна на этом множестве.

Пример 76. Показать, что функция $f(x, y) = \cos \frac{\pi x}{y}$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной на множестве $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \neq 0\}$. Какое условие теоремы Кантора нарушено?

Решение. Непрерывность функции следует из теоремы о непрерывности суперпозиции непрерывных функций.

По определению, функция f не является равномерно непрерывной на указанном множестве, если $\forall \delta > 0 \exists M', M'' \in E$ такие, что $\rho(M', M'') < \delta$, но $|f(M') - f(M'')| \geq \varepsilon$. Покажем, что это так. Выберем две последовательности точек: $M'_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ и $M''_n(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$ ($n \in \mathbb{N}$). Очевидно, что $M'_n \rightarrow (0, 0)$, $M''_n \rightarrow (0, 0)$ при $n \rightarrow +\infty$, а поэтому для любого $\delta > 0$ найдётся номер n_0 : $\forall n \geq n_0 \rho(M'_n, M''_n) < \delta$. С другой стороны, вычислим $|f(M'_n) - f(M''_n)| = |-1 - 0| = 1 > \varepsilon$, если взять $0 < \varepsilon < 1$. Таким образом, функция не является равномерно непрерывной на E . Теорема Кантора в данном случае не применима, так как нарушено условие замкнутости множества E . $\square$

В следующих теоремах предполагается, что множество D связно.

Теорема 3 (ограниченность частных производных как достаточное условие равномерной непрерывности).¹ Если функция $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ имеет на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^m$ ограниченные частные производные $|f'_{x_1}| \leq L, \dots, |f'_{x_m}| \leq L$, то f равномерно непрерывна на D .

Пример 77. Доказать, что функция

$$f(x, y, z) = \sin(2x - 5y + 7z)$$

равномерно непрерывна в пространстве $\mathbb{R}^3$.

¹В этой теореме, немного забегая вперёд, используются понятия частных производных, изучаемых на следующем семинаре. Однако для полноты изложения мы решили привести здесь эту теорему.

Доказательство. Найдём частные производные и покажем, что все они ограничены:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = |2 \cos(2x - 5y + 7z)| \leq 2, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = |-5 \cos(2x - 5y + 7z)| \leq 5,$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| = |7 \cos(2x - 5y + 7z)| \leq 7.$$

В силу теоремы 3 данная функция равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^3$. $\square$

Следующую теорему для упрощения понимания сформулируем для функций двух переменных.

Теорема 4 (*существование конечного предела на бесконечности как достаточное условие равномерной непрерывности*). Если $f(x, y)$ непрерывна при $x^2 + y^2 \geq a^2$ и существует конечный $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = A$, то $f(x, y)$ равномерно непрерывна при $x^2 + y^2 \geq a^2$.

Пример 78. Исследовать на равномерную непрерывность функцию

$$f(x, y, z) = \frac{\sin(xyz)}{2x^2 + 3y^4 + 5z^6 + 1}$$

во внешней части шара $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$.

Решение. Так как функция $f(x, y, z)$ непрерывна при $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ и существует конечный $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \\ z \rightarrow \infty}} f(x, y, z) = 0$, то f равномерно непрерывна при $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$. $\square$

Теорема 5 (*возможность доопределения непрерывным образом на замыкание множества как необходимое и достаточное условие равномерной непрерывности*). Функция $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывная на незамкнутом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}^m$, равномерно непрерывна на этом множестве тогда и только тогда, когда её можно доопределить непрерывным образом на замыкание $\bar{D}$ этого множества в $\mathbb{R}^m$.

В частности, если f равномерно непрерывна на открытом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}^m$ и $A \notin D$ – предельная точка D , то существует конечный предел $\lim_{\substack{M \rightarrow A, \\ M \in D}} f(M)$.

Пример 79. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $G = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 2\}$ функцию

$$f(x, y) = \arctg(x^2 + 3y^4) \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{|x| + |y|} \right).$$

Решение. Множество G является незамкнутым. На внешней границе $x^2 + y^2 = 2$ функцию $f(x, y)$, очевидно, можно доопределить по непрерывности. Покажем, что

это можно сделать и в точке $(0, 0)$. В самом деле, так как $|\operatorname{arctg} \alpha| \leq |\alpha|$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), то

$$\left| \operatorname{arctg}(x^2 + 3y^4) \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{|x| + |y|} \right) \right| \leq |\operatorname{arctg}(x^2 + 3y^4)| \leq x^2 + 3y^4 \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$. Так как предел в точке $(0, 0)$ существует и равен 0, то можно доопределить функцию в $(0, 0)$ этим предельным значением. Следовательно, по теореме 5 функция является равномерно непрерывной на указанном множестве. $\square$

Теорема 6. Пусть функция $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ определена на множестве D и не является равномерно непрерывной в некоторой связной области $G \subset D$ (или на некоторой кривой (поверхности), принадлежащей D). Тогда функция не будет равномерно непрерывной и на D .

Пример 80. Показать, что функция

$$f(x, y) = \sin \left(\frac{1}{x + y} \right)$$

не является равномерно непрерывной на множестве

$$G = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Решение. Зафиксируем $y = 0$ и получим функцию одной переменной $f(x, 0) = \sin \frac{1}{x}$, $0 < |x| \leq 1$. Достаточно показать, что эта функция не является равномерно непрерывной на полуинтервале $(0, 1]$, тогда по теореме 6 функция $f(x, y)$ не будет равномерно непрерывной и на G . По определению, покажем, что $\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \exists x', x'' : |x' - x''| < \delta$, но $\left| \sin \frac{1}{x'} - \sin \frac{1}{x''} \right| \geq \varepsilon$. Пусть $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $x''_n = \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $|x'_n - x''_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ и поэтому $\forall \delta > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 |x'_n - x''_n| < \delta$, но $\left| \sin \frac{1}{x'_n} - \sin \frac{1}{x''_n} \right| = 1 > \varepsilon$, если взять $\varepsilon = \frac{1}{2}$. $\square$

Теорема 7. Пусть функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна на каждом из двух соприкасающихся по общему участку границы множеств D_1 и D_2 (участок границы принадлежит каждому из множеств). Тогда функция f равномерно непрерывна на объединении $D_1 \cup D_2$.

Пример 81. Показать, что функция $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^2$.

Решение. Разобьём всю плоскость на две смежные части:

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{и} \quad D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Так как в точке $(0, 0)$ функция имеет конечный предел, равный единице, то функцию можно доопределить на весь единичный круг по непрерывности, и поэтому функция

равномерно непрерывна на D_1 . Далее, поскольку у данной непрерывной на функции существует конечный предел $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = 0$, то функция равномерно непрерывна на D_2 . Тогда по теореме 7 функция f равномерно непрерывна на объединении $D_1 \cup D_2$. $\square$

Теорема 8. Пусть функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна на множестве D и непрерывная кривая L разбивает множество D на два подмножества D_1 и D_2 . Тогда функция f равномерно непрерывна на каждом из этих подмножеств.

Теорема 9. Равномерно непрерывная на ограниченном множестве функция ограничена на этом множестве. На неограниченном множестве функция может быть и неограниченной.

Теорема 10. Если функция $f(x, y)$ не ограничена в любой окрестности фиксированной точки M_0 , то она не является равномерно непрерывной на любом множестве, для которого эта точка – предельная.

Теорема 11 (*арифметические операции над равномерно непрерывными функциями*). Сумма и разность конечного числа равномерно непрерывных на D функций равномерно непрерывны на этом множестве. Произведение конечного числа равномерно непрерывных на ограниченном множестве D функций равномерно непрерывно на нём.

«Россия — это континент, который притворяется страной.

Россия — это цивилизация, которая притворяется нацией».

*Жозе Мануэл Баррозу (род. 1956) — португальский и
общеευропейский государственный и политический
деятель. 11-й Председатель Еврокомиссии
(2004–2014). Премьер-министр Португалии
(2002–2004).*

3.4 Задачи для самостоятельного решения

Задачи на исследований функций на непрерывность:

№107. [8, № 3255] Доказать, что если функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x при каждом фиксированном значении y и имеет ограниченную производную по переменной y , то эта функция непрерывна по совокупности переменных x и y .

№108. Доказать, что если функция $f(x, y)$ на некотором множестве D непрерывна по переменной x и равномерно относительно x непрерывна по переменной y , то эта функция непрерывна на множестве D .

№109. Исследовать функции на непрерывность на всей плоскости $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \sin x + e^{xy}, \quad g(x, y) = \operatorname{arctg}(\ln(|x| + |y| + 2)).$$

№110. [8, № 3195] Найти точки разрыва функции

$$u = \frac{xy}{x + y}.$$

№111. [8, № 3198] Найти точки разрыва функции

$$u = \frac{1}{\sin x \sin y}.$$

№112. [10, с. 23] Исследовать разрывы функции

$$f(x, y) = \frac{1}{\ln |1 - x^2 - 4y^2|}.$$

№113. [10, с. 24] Исследовать разрывы функции

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin(xyz)}{z}, & z \neq 0; \\ x^2, & z = 0. \end{cases}$$

№114. Найти точки разрыва функции

$$f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{5x + y^2}{x^2 - y^2 - 2}} + 3xy^4 - 7.$$

№115. Найти точки разрыва функции

$$f(x, y) = \sqrt{2} \operatorname{sgn}(x + y) - 5[x + y] + 31,$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа.

№116. Найти точки разрыва функции

$$f(x, y, z) = \frac{7xy}{(z^2 - x^2 - y^2)^2} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x^2 + y^4) + \lg z.$$

№117. Является ли функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{x}, & x \neq 0, y \in \mathbb{R}; \\ 4, & x = 0, y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

непрерывной в точке $(0, 4)$? Ответ обосновать.

№118. Является ли функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x+y}, & x \neq -y; \\ 0, & x = -y, \end{cases}$$

непрерывной в точке $(0, 0)$? Ответ обосновать.

№119. Привести пример функции $f(x, y)$, разрывной в квадрате $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, строго монотонной по каждой переменной и непрерывной по одной из них на $[-1, 1]$ (при фиксированной другой).

№120. Привести пример функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$, каждая из которых является разрывной в точке $(0, 0)$ и таких, что: а) их сумма есть функция, непрерывная в точке $(0, 0)$; б) их произведение есть функция, непрерывная в точке $(0, 0)$.

№121. [8, № 3202] Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

непрерывна в точке $(0, 0)$ по каждой переменной x и y в отдельности (при фиксированном значении другой переменной), но не является непрерывной по совокупности этих переменных.

№122. Привести пример функции $f(x, y)$, разрывной в каждой точке квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, но непрерывной как функция x при любом фиксированном $y \in [0, 1]$.

№123. Исследовать функцию на непрерывность по каждой переменной в отдельности и по совокупности переменных:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \mathbb{Q}^2; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

№124. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & (x, y) \in \mathbb{Q}^2; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

№125. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

№126. Исследовать функцию на непрерывность по каждой переменной в отдельности и по совокупности переменных:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y^2 + \sin^2 x}, & y^2 + \sin^2 x \neq 0; \\ 0, & y^2 + \sin^2 x = 0. \end{cases}$$

№127. Исследовать функцию на непрерывность по каждой переменной в отдельности и по совокупности переменных в точке $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin^2 x}{y^2 + \sin^4 x}, & y^2 + \sin^4 x \neq 0; \\ 0, & y^2 + \sin^4 x = 0. \end{cases}$$

№128. Исследовать функцию на непрерывность по каждой переменной в отдельности и по совокупности переменных в точке $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{\sin x + \sin y}{x + y}, & x + y \neq 0; \\ 0, & x + y = 0. \end{cases}$$

№129. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y}{x - y}, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

№130. Исследовать на непрерывность в точке $\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos y}{x - y}, & x - y \neq 0, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

№131. Исследовать функцию на непрерывность в точке $(0, 0)$ по каждой переменной в отдельности и по совокупности переменных:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x(x-y)}{x^2+xy+y^2}}, & x^2+xy+y^2 \neq 0; \\ 0, & x=y=0. \end{cases}$$

№132. Исследовать функцию на непрерывность по каждой переменной в отдельности и по совокупности переменных:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{x^2(x^2+y^2)}{y^4+x^4}}, & y^4+x^4 \neq 0; \\ 0, & y^4+x^4 = 0. \end{cases}$$

№133. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^{\frac{1}{2}}y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 > 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

№134. Исследовать на непрерывность по совокупности переменных и по каждой переменной в отдельности в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 > 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

№135. Исследовать на непрерывность в $\mathbb{R}^2$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 1, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

№136. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

№137. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

№138. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy - 2y^2}{2x^2 - 2xy + 5y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

№139. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \ln(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

№140. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} y \ln(x^2 + y^2 - xy), & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

№141. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2}, & \text{если } x^4 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^4 + y^2 = 0. \end{cases}$$

№142. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}, & \text{если } x^2 + y^6 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^6 = 0. \end{cases}$$

№143. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 y)}{x^4 + y^2}, & \text{если } x^4 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^4 + y^2 = 0. \end{cases}$$

№144. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arctg(x^3 y)}{x^2 + y^4}, & \text{если } x^2 + y^4 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^4 = 0. \end{cases}$$

№145. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x - y}, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

№146. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x + y}, & x \neq -y; \\ 0, & x = -y. \end{cases}$$

№147. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x + y}, & \text{если } x \neq -y; \\ 0, & \text{если } x = -y. \end{cases}$$

№148. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0, 0)$ функцию

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xyz|}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 = 0. \end{cases}$$

№149. Исследовать на непрерывность в точке $(0, 0, 0)$ функцию

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 y z}{x^2 + y^2 + z^2}, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 = 0. \end{cases}$$

№150. Исследовать на непрерывность в зависимости от значений параметров α, β функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} |x|^\alpha \cdot |y|^\beta, & \text{если } xy \neq 0, \\ 0, & \text{если } xy = 0. \end{cases}$$

Задачи на исследование функций на равномерную непрерывность:

№151. Доказать, что если функция $f(x, y)$ имеет ограниченные частные производные $|f'_x(x, y)| \leq M$, $|f'_y(x, y)| \leq M$ на множестве $D \subseteq D_f$, то $f(x, y)$ равномерно непрерывна на D .

№152. Доказать, что если $f(x, y)$ непрерывна при $x^2 + y^2 \geq a^2$ и существует конечный $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = A$, то $f(x, y)$ равномерно непрерывна при $x^2 + y^2 \geq a^2$.

№153. Пусть на некотором множестве $D \in \mathbb{R}^m$ задана функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая на D условию Липшица. Доказать, что такая функция равномерно непрерывна на D .

№154. Привести пример неограниченной равномерно непрерывной функции $f(x, y)$.

№155. Привести пример функции $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, равномерно непрерывной на множестве $x \geq 0, y \geq 0$, непрерывной, но не равномерно непрерывной на $\mathbb{R}^2$.

№156. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $\mathbb{R}^2$ функцию $f(x, y) = 2x - 3y + 5$.

№157. Доказать, что функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ не является равномерно непрерывной на плоскости $\mathbb{R}^2$.

№158. Доказать, что функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ является равномерно непрерывной на плоскости $\mathbb{R}^2$.

№159. Доказать, что функция $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-|xy|}$ равномерно непрерывна на плоскости $\mathbb{R}^2$.

№160. Исследовать функцию на равномерную непрерывность на множестве $E = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq 2\}$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y^2 + xy}, & \text{если } x + y \neq 0, \\ 0, & \text{если } x + y = 0. \end{cases}$$

№161. Исследовать на равномерную непрерывность при $|x| < \infty, |y| < \infty$ функцию

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2).$$

№162. Исследовать на равномерную непрерывность при $|x| < \infty, |y| < \infty$ функцию

$$f(x, y) = x^2 + \sqrt{|y|}.$$

№163. Исследовать на равномерную непрерывность при $|x| < \infty, |y| < \infty$ функцию

$$f(x, y) = \sin(x^2 + xy + y^2).$$

№164. Исследовать на равномерную непрерывность при $|x| < \infty, |y| < \infty$ функцию

$$f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}.$$

№165. Исследовать на равномерную непрерывность при $|x| < \infty, |y| < \infty$ функцию

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^4 + y^2).$$

№166. Функция

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$$

непрерывна на множестве $D = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$. Является ли она равномерно непрерывной на этом множестве? Является ли она равномерно непрерывной на множестве $G = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 1\}$?

№167. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $D = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ функцию

$$f(x, y) = xy \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

№168. Исследовать на равномерную непрерывность на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ функцию

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\ln(x^2 + y^2 + 1)}.$$

№169. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $\{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 2\}$ функцию

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy} \cdot \ln(x^2 + y^2).$$

№170. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ функцию

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y^2} \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

№171. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ функцию

$$f(x, y) = 1 - 2x + 4y + \sqrt[3]{xy} \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

№172. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $\{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ функцию

$$f(x, y) = xy \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

№173. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $\{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ функцию

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + y^4} \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

№174. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $\{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ функцию

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x^2 + y^2}.$$

№175. Показать, что функция

$$f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{y}$$

непрерывна, но не является равномерно непрерывной на множестве $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \neq 0\}$. Какое условие теоремы Кантора нарушено?

№176. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $\{(x, y) \mid 0 < |x| < 1, 0 < |y| < 1\}$ функцию

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

№177. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $E = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, x^2 + y^2 \neq 0\}$ функцию

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$$

№178. Исследовать на равномерную непрерывность на $\mathbb{R}^2$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(|x| + |y|)}{|x| + |y|}, & \text{если } |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

3.5 Ответы и решения

107. По условию, существует число $C > 0$: $|f'_y(x, y)| \leq C$ для всех (x, y) области G определения функции f . Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное, а (x_0, y_0) – любая точка из G . Достаточно показать, что $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$. В самом деле, используя неравенство треугольника и теорему Лагранжа, имеем

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leq \\ &\leq |f'_y(x, y_0 + \theta(y - y_0))||y - y_0| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \end{aligned} \quad (1)$$

В силу непрерывности функции f по x , при $y = y_0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, y_0)$ такое, что

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2)$$

если $|x - x_0| < \delta_1$. Из условий (1), (2) и $|f'_y(x, y)| \leq C$ получаем

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq C|y - y_0| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

если $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, где $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2C}, \delta_1 \right\}$.

108. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть точка $M_0(x_0, y_0) \in D$. Требуется доказать, что существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой точки $M(x, y) \in D$, удовлетворяющей условию $\rho(M, M_0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Так как функция $f(x, y)$ непрерывна по x в D , то для данного ε существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого x , удовлетворяющего условию $|x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, так как $f(x, y)$ равномерно относительно x непрерывна по переменной y в D , то найдётся такое число $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, что для любого x выполнено $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, как только $|y - y_0| < \delta_2$.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда для любой точки $M(x, y) \in D$: $\rho(M, M_0) < \delta$, верно

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

109. Обе функции непрерывны на $\mathbb{R}^2$ согласно теореме 2 (п.3.2) о непрерывности суперпозиции непрерывных функций.

110. Функция не определена при $x + y = 0$, поэтому точки разрыва заполняют собой прямую $y = -x$.

111. Эта функция двух переменных определена во всех точках плоскости Oxy , кроме прямых $x = \pi n$ и $y = \pi k$ ($n, k \in \mathbb{Z}$), где она терпит бесконечные разрывы.

112. Функция $f(x, y)$ терпит разрывы в точках, в которых она не определена:

$$1 - x^2 - 4y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 1;$$

$$|1 - x^2 - 4y^2| = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 4y^2 = 2.$$

1) При приближении к точкам эллипса $x^2 + 4y^2 = 1$ имеем $f(x, y) \rightarrow 0$. Следовательно, в этих точках разрыв устранимый. Чтобы устранить его, надо доопределить функцию, положив $f(x, y) = 0$, если $x^2 + 4y^2 = 1$.

2) При приближении к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 2$ или к точке $(0, 0)$ имеем $f(x, y) \rightarrow \infty$, т. е. это точки неустранимого (бесконечного) разрыва.

113. Так как при $z \rightarrow 0$ имеем $\sin(xyz) \sim xyz$, то $\frac{\sin(xyz)}{z} \rightarrow xy$. Этот предел совпадает со значением функции при $z = 0$ только в точках $y = x$. Следовательно, на прямой $y = x$, $z = 0$ функция $f(x, y, z)$ непрерывна. Остальные точки плоскости $z = 0$ являются точками разрыва.

114. Линией разрыва для данной функции является гипербола $x^2 - y^2 = 2$.

115. Линии разрыва данной функции – это семейство прямых $x + y = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

116. Линии разрыва данной функции – это полукус $z^2 = x^2 + y^2$ с выколотой вершиной $(0, 0)$, расположенный в верхнем полупространстве $z > 0$.

117. Для проверки непрерывности функции в точке $(0, 4)$ вычислим предел функции в указанной точке и сравним его со значением функции в этой точке:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 4}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 4}} \left(y \cdot \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 4}} y = 4,$$

так как $\operatorname{tg} t \sim t$ при $t \rightarrow 0$ и, значит, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 4}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = 1$. Поскольку предел оказался равен значению функции в точке, то функция является непрерывной в $(0, 4)$.

118. Вычислим предел функции $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y}{x + y}$ в указанной точке и сравним его со значением функции в этой точке. Видно, что если устремить точку (x, y) к точке $(0, 0)$ по прямой $y = x$, то предел равен $\frac{1}{2}$. А если по точкам $(x, 0)$, где $x \neq 0$, $x \rightarrow 0$, то этот же предел равен 0. Это говорит о том, что предел не существует и, следовательно, функция разрывна в точке $(0, 0)$.

119. Например, $f(x, y) = x + y + \operatorname{sgn} y$.

120. а) Например, $f(x, y) = \operatorname{sgn}(xy)$, $g(x, y) = xy - \operatorname{sgn}(xy)$. Другой пример: $f(x, y) = -g(x, y) = \operatorname{sgn}(xy)$.

б) Например, $f(x, y) = \operatorname{sgn}(xy)$, $g(x, y) = xy$. Другой пример: $f(x, y) = \operatorname{sgn}(xy)$, $g(x, y) = 1 - \operatorname{sgn}^2(xy)$.

121. Покажем, что функция непрерывна в точке $(0, 0)$ по переменной x :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{2x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0 = f(0, 0).$$

Ввиду симметрии функции относительно x и y , аналогично получаем, что функция непрерывна в точке $(0, 0)$ и по переменной y . Однако функция не является непрерывной в этой точке по совокупности переменных. Действительно, обе последовательности точек $M'_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ и $M''_n = (\frac{2}{n}, \frac{1}{n})$ сходятся при $n \rightarrow +\infty$ к точке $(0, 0)$, а соответствующие им последовательности значений функции сходятся к различным предельным значениям:

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1, \quad f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{4}{5}.$$

122. Например,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \ x \in [0, 1]; \\ 0, & \text{если } y \in [0, 1] \cap \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}, \ x \in [0, 1]. \end{cases}$$

123. 1) Исследуем на непрерывность по переменной x . Зафиксируем какое-либо $y = y_0 \in \mathbb{Q}$, тогда получим функцию одной переменной, совпадающую с функцией Дирихле:

$$g(x, y_0) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

которая разрывна при любом $x = x_0$. Если же зафиксировать произвольное иррациональное $y = y_0$, тогда имеем функцию $g(x, y_0) \equiv 0$, которая непрерывна по x . Аналогичный результат получим при исследовании функции на непрерывность по переменной y .

2) Что касается непрерывности по совокупности переменных, то поскольку для любой точки (x_0, y_0) всегда можно выбрать две сходящиеся к этой точке последовательности M'_n, M''_n , обе координаты точек в первой из которых рациональны и, следовательно, $f(M'_n) \rightarrow 1$, а хотя бы одна из координат второй последовательности иррациональна и, значит, $f(M''_n) \rightarrow 0$, то предел функции в точке (x_0, y_0) не существует, и функция f разрывна во всех точках плоскости.

124. Рассмотрим точки, координаты которых удовлетворяют условию $xy = 0$, эти точки лежат на координатных осях. Тогда $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \in \mathbb{R}}} xy = 0 = f(0, y)$,

$\lim_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ y \rightarrow 0}} xy = 0 = f(x, 0)$, т. е. функция непрерывна в этих точках. Во всех остальных точках (x, y) , в которых $xy \neq 0$, если приближаться к такой точке по точкам с рациональными координатами, значение функции будет равно $xy (\neq 0)$, а если приближаться к (x, y) по точкам с иррациональными координатами, то предел равен 0. Следовательно, в этих точках предел не существует. Ответ: функция терпит разрыв во всех точках, не лежащих на координатных осях.

125. Ответ: прямая $y = 0$ с выколотой точкой $(0, 0)$ – множество точек разрыва (2-го рода). В остальных точках функция непрерывна.

126. Очевидно, что во всех точках (x, y) : $y^2 + \sin^2 x \neq 0$ функция $f(x, y)$ будет непрерывна по совокупности переменных (как суперпозиция непрерывных функций). Найдём точки возможного разрыва: $y^2 + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $y = 0$.

а) Исследуем функцию на непрерывность в точке $(0, 0)$.
Непрерывность по x : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1 \neq f(0, 0)$, т. е. разрывна.
Непрерывность по y : $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0)$, т. е. непрерывна. $\Rightarrow$ По совокупности переменных – не является непрерывной.

б) Исследуем функцию на непрерывность в точках $(\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.
Непрерывность по x : $\lim_{x \rightarrow \pi n} f(x, 0) = \infty \neq f(0, 0)$, т. е. разрывна.
Непрерывность по y : $\lim_{y \rightarrow 0} f(\pi n, y) = +\infty \neq f(0, 0)$, т. е. разрывна. Следовательно, по совокупности переменных – не является непрерывной.

127. 1) Непрерывность по x :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \sin^2 x}{0^2 + \sin^4 x} = 0 = f(0, 0),$$

т. е. непрерывна. Непрерывность по y :

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cdot \sin^2 0}{y^2 + \sin^4 0} = 0 = f(0, 0),$$

т. е. непрерывна.

Исследуем функцию на непрерывность в точке $(0, 0)$. Для этого проверим выполнение условия непрерывности:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y \sin^2 x}{y^2 + \sin^4 x} = 0 = f(0, 0).$$

Покажем, что предел слева не существует и, следовательно, функция разрывна в указанной точке. В самом деле, рассмотрим две последовательности точек. Пусть $M'_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$ при $n \rightarrow +\infty$. При этом

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot (\sin \frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n})^2 + (\sin \frac{1}{n})^4} = 0.$$

Теперь рассмотрим последовательность $M_n'' = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \rightarrow (0, 0)$ при $n \rightarrow +\infty$. При этом

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot (\sin \frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n^2})^2 + (\sin \frac{1}{n})^4} = \frac{1}{2}.$$

Это противоречит единственности предела и доказывает его несуществование. Ответ: функция непрерывна в точке $(0, 0)$ по x и по y , но разрывна по совокупности этих переменных.

128. Исследуем на непрерывность по совокупности переменных. Для этого достаточно проверить условие непрерывности

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(xy \cdot \frac{\sin x + \sin y}{x + y} \right) = 0 = f(0, 0).$$

Применяя формулу суммы синусов и учитывая соотношение эквивалентности $\sin \frac{x+y}{2} \sim \frac{x+y}{2}$, получаем:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(xy \cdot \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{x + y} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(xy \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right) = 0,$$

так как $xy \rightarrow 0$, а функция $\cos \frac{x-y}{2}$ является ограниченной. Из непрерывности по совокупности переменных следует непрерывность функции в точке $(0, 0)$ по каждой из переменных.

129. Воспользуемся известным тригонометрическим тождеством $\arctg x - \arctg y = \arctg \frac{x-y}{1+xy}$ ($xy > -1$) и соотношением эквивалентности $\arctg t \sim t$ при $t \rightarrow 0$, тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ y \rightarrow a}} \left(x \cdot \frac{\arctg x - \arctg y}{x - y} \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \left(\frac{x}{x - y} \cdot \arctg \frac{x - y}{1 + xy} \right) = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \left(\frac{x}{x - y} \cdot \frac{x - y}{1 + xy} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{x}{1 + xy} = \frac{a}{1 + a^2}. \end{aligned}$$

Значит, в каждой точке (a, a) , функцию можно доопределить по непрерывности конечным пределом, однако при $a \neq 0$ он не равен значению 0 функции, т. е. функция терпит неустранимый разрыв. В точке $(0, 0)$ и других точках, отличных от (a, a) , $a \neq 0$, функция непрерывна. Итак, прямая $y = x$ с выколотой точкой $(0, 0)$ является линией разрыва для данной функции.

130. Координаты точки $M_0(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi})$ удовлетворяют условию $x - y = 0$, поэтому $f(M_0) = 0$. Выясним, существует ли предел функции в данной точке:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1/\pi \\ y \rightarrow 1/\pi}} \frac{\cos x - \cos y}{x - y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1/\pi \\ y \rightarrow 1/\pi}} \frac{-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{x - y} =$$

$$= - \lim_{\substack{x \rightarrow 1/\pi \\ y \rightarrow 1/\pi}} \frac{\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} = - \lim_{\substack{x \rightarrow 1/\pi \\ y \rightarrow 1/\pi}} \sin \frac{x+y}{2} = - \sin \frac{1}{\pi}.$$

Так как предел существует, конечен, но не равен значению функции в точке M_0 , то функция разрывна в этой точке. Заметим, что данный разрыв является *устранимым*, что позволяет, доопределив функцию в точке разрыва её предельным значением, получить функцию, непрерывную в указанной точке.

131. 1) Непрерывность по x :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2}} = 1 \neq 0 = f(0, 0),$$

следовательно, функция разрывна по переменной x в точке $(0, 0)$ (и разрывна в этой точке по совокупности переменных).

2) Непрерывность по y :

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{0}{y^2}} = 0 = f(0, 0),$$

значит, функция непрерывна по переменной y в этой точке.

132. Функция непрерывна всюду, кроме, возможно, точки $(0, 0)$, как суперпозиция непрерывных функций. 1) Исследуем функцию на непрерывность в точке $(0, 0)$ по переменной x :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{\frac{x^4}{x^4}} = 1 \neq 0 = f(0, 0),$$

следовательно, функция разрывна по этой переменной.

2) Исследуем функцию на непрерывность в точке $(0, 0)$ по переменной y :

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt[4]{\frac{0^2 \cdot (0^2 + y^2)}{y^4 + 0^4}} = 0 = f(0, 0),$$

т. е. функция непрерывна по y . Итак, по совокупности переменных функция непрерывна всюду, кроме $(0, 0)$.

133. Достаточно проверить выполнение условия

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|x|} \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0).$$

Переходя к полярным координатам, имеем

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{\sqrt{|r \cos \varphi|} \cdot r \sin \varphi}{r} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \sqrt{r} (\sqrt{|\cos \varphi|} \cdot \sin \varphi).$$

Этот предел равен 0, поскольку $\sqrt{r} \rightarrow 0$, а функция $\sqrt{|\cos \varphi|} \cdot \sin \varphi$ является ограниченной. Итак, функция непрерывна в точке $(0, 0)$.

134. Исследуем на непрерывность по совокупности переменных. Для этого достаточно проверить условие непрерывности

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0).$$

Оценим по модулю выражение под знаком предела, используя неравенство $|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$:

$$\left| \frac{|x|y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что условие непрерывности выполняется, т. е. функция непрерывна в точке $(0, 0)$. Непрерывность по x и по y следуют из непрерывности по совокупности переменных.

135. Исследуем на непрерывность в точке $(0, 0)$ (в остальных точках функции непрерывна как суперпозиция непрерывных функций).

1-й способ. Рассмотрим последовательность точек $M_n(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$ при $n \rightarrow +\infty$, при этом $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(M_n) = 0 \neq 1$, что означает разрывность функции в этой точке.

2-й способ. Перейдём к полярным координатам:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{r^2(\cos \varphi + \sin \varphi)^2}{r^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} (\cos \varphi + \sin \varphi)^2.$$

Поскольку значение предела зависит от φ , то данный предел не существует. Поэтому $(0, 0)$ – точка разрыва (второго рода).

136. Рассмотрим последовательность точек $M_n(0, \frac{1}{n})$, сходящуюся к $(0, 0)$ при $n \rightarrow +\infty$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(M_n) = 1 \neq 0 = f(0, 0)$. Следовательно, функция разрывна в точке $(0, 0)$.

137. Перейдём к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{(r \cos \varphi)^3 + (r \sin \varphi)^3}{r^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} r(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)$$

$= 0$ в силу ограниченности выражения $(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)$ при любом φ . Следовательно, определение непрерывности в точке выполняется, и функция является непрерывной в $(0, 0)$.

Можно было доказать равенство нулю предела иначе:

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} = \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} + \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3}{|x|^2} + \frac{|y|^3}{|y|^2} = |x| + |y| \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$.

138. Условие непрерывности имеет вид

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - xy - 2y^2}{2x^2 - 2xy + 5y^2} = 0 \quad (= f(0, 0)).$$

Рассмотрим частный случай, когда $x \neq 0, y = 0$, тогда получим

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 0}} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

Поэтому функция разрывна в точке $(0, 0)$.

139. Перейдём к полярным координатам и проверим выполнение условия непрерывности $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} ((r \cos \varphi)^2 \ln(r^2)) = 2 \cdot \lim_{r \rightarrow 0} (r^2 \ln r \cdot \cos \varphi).$$

Так как функция $\cos \varphi$ ограниченная, а $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln r}{\frac{1}{r^2}} = 0$, то условие непрерывности функции в точке $(0, 0)$ выполняется, а значит, функция непрерывна в этой точке.

140. Перейдём к полярным координатам, тогда условие непрерывности $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$ примет вид:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} (r \sin \varphi \cdot \ln(r^2(1 - \sin \varphi \cos \varphi))) = \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} (r \sin \varphi \ln(r^2)) + \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} (r \sin \varphi \ln(1 - \sin \varphi \cos \varphi)) = 0 + 0 = 0 = f(0, 0), \end{aligned}$$

т. е. функция непрерывна в точке $(0, 0)$.

141. Условие непрерывности имеет вид

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} = 0.$$

Данный предел действительно равен нулю, что следует из очевидного неравенства $\frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$ (при $a^2 + b^2 \neq 0$):

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} \right| = |y| \cdot \left| \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{|y|}{2}.$$

Поскольку $\frac{|y|}{2} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$, то, в силу принципа двусторонней ограниченности, получаем, что исследуемый предел равен 0. Следовательно, функция непрерывна в указанной точке.

142. Решение задачи сводится к проверке равенства нулю предела $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$. 1-й способ. Пусть $x = y^3$, тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^6}{2y^6} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

следовательно, функция разрывна в точке $(0, 0)$.

2-й способ. Перейдём к полярным координатам:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{r \cos \varphi \cdot (r \sin \varphi)^3}{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^6} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{r^2 \cos \varphi \sin^3 \varphi}{\cos^2 \varphi + r^4 \sin^6 \varphi}.$$

Пусть $\varphi = \arccos r^2$ (при достаточно малых r), тогда

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi = \arccos r^2}} \frac{r^2 \cos \varphi \sin^3 \varphi}{\cos^2 \varphi + r^4 \sin^6 \varphi} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi = \arccos r^2}} \frac{r^2 \cdot r^2 \sqrt{(1 - r^4)^3}}{r^4 + r^4 \sqrt{(1 - r^4)^6}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Итак, функция разрывна в точке $(0, 0)$.

143. Заметим, что в силу соотношения $\sin t \sim t$ при $t \rightarrow 0$, имеем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^4 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}.$$

Последний предел равен нулю, это следует из очевидного неравенства

$$\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2}:$$

$$\left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \right| = |x| \cdot \left| \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{|x|}{2} < \varepsilon$$

для произвольного ε при достаточно малых x и y из окрестности точки $(0, 0)$. Функция непрерывна в указанной точке.

144. Условие непрерывности имеет вид

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{arctg}(x^3 y)}{x^2 + y^4} = 0 = f(0, 0).$$

Заметим, что в силу соотношения $\operatorname{arctg} t \sim t$ при $t \rightarrow 0$, имеем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{arctg}(x^3 y)}{x^2 + y^4} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^2 + y^4}.$$

Покажем, что последний предел равен 0. Это следует из цепочки соотношений:

$$\left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{x^3 y}{x^2} \right| = |xy| \rightarrow 0.$$

145. По определению, функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$, если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0).$$

1-й способ. Переходя к полярным координатам, имеем

$$\frac{x^2 y^3}{x - y} = \frac{r^5 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi}{r(\cos \varphi - \sin \varphi)} = \frac{r^4 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi}{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \varphi)}.$$

В частности, при $\varphi = \frac{\pi}{4} - \arcsin r^5$ имеем

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{r^4 \cos^2(\frac{\pi}{4} - \arcsin r^5) \sin^3(\frac{\pi}{4} - \arcsin r^5)}{\sqrt{2} r^5} = +\infty \neq 0.$$

2-й способ. Покажем, оставаясь в декартовых координатах, что данный предел не равен нулю. При $y = x - x^5$ имеем:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^3}{x - y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (x - x^5)^3}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 (1 - x^4)^3}{x^5} = 1 \neq 0.$$

Ответ: функция разрывна в точке $(0, 0)$.

146. Ответ: функция не является непрерывной. См. решение предыдущей задачи. Указание: положите $y = -x + x^5$.

147. Покажем, что данный предел не равен нулю (т. е. условие непрерывности в точке $(0, 0)$ не выполняется). При $y = x$ предел, очевидно, равен 0. Но при $y = -x + x^3$ имеем:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-x + x^3)^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(x^2 - 1)^2}{x^3} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, предел не существует, и функция разрывна в точке $(0, 0)$.

148. Достаточно проверить, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} f(x, y, z) = f(0, 0, 0)$.

1-й способ:

$$\sqrt{\frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2}} \leq \sqrt{\frac{|xyz|}{x^2 + y^2}} = \sqrt{|z|} \sqrt{\frac{|x||y|}{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{|z|}.$$

(воспользовались неравенством $\frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$). Поскольку $|z| \rightarrow 0$, то данный предел равен нулю, что совпадает со значением функции в точке $(0, 0, 0)$. Следовательно, функция непрерывна в этой точке.

2-й способ: положим $x = r \cos \alpha$, $y = r \cos \beta$, $z = r \cos \gamma$, где α, β, γ – углы, образованные радиус-вектором $\vec{r}$ точки (x, y, z) с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно, причём поскольку $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, то косинусы этих углов (направляющие косинусы вектора $\vec{r}$) связаны между собой соотношением $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Тогда получим предел

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} f(x, y, z) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \sqrt{\frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \alpha, \beta, \gamma \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1}} \sqrt{\frac{r^3 |\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma|}{r^2}} \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \alpha, \beta, \gamma}} \sqrt{r |\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma|} \leq \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \alpha, \beta, \gamma}} \sqrt{r} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, условие непрерывности функции f в точке $(0, 0, 0)$ выполняется.

3-й способ: положить $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

149. Ответ: непрерывна. См. решение предыдущей задачи.

150. Точки возможного разрыва – те, в которых $x = 0$ или $y = 0$. 1) Точки $(0, y)$, $y \neq 0$: условие непрерывности $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (|x|^\alpha \cdot |y|^\beta) = 0$ выполняется, если $\alpha > 0$,

$\beta \in \mathbb{R}$;

2) точки $(x, 0)$, $x \neq 0$: условие непрерывности $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (|x|^\alpha \cdot |y|^\beta) = 0$ выполняется, если $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$;

3) точка $(0, 0)$: условие непрерывности $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (|x|^\alpha \cdot |y|^\beta) = 0$ выполняется, если

$\alpha > 0$, $\beta > 0$. Также оно выполняется, если один из параметров равен нулю, а другой положителен.

151. Пусть $M'(x, y)$, $M''(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Согласно определению равномерной непрерывности, достаточно доказать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: для любых M', M'' таких, что $\rho(M', M'') < \delta$, выполняется

неравенство $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$. В самом деле,

$$\begin{aligned} |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)| &\leq |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)| + \\ &+ |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| = \end{aligned}$$

(применим теорему Лагранжа по каждой переменной)

$$\begin{aligned} &= |f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \cdot \Delta x| + |f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y| \leq \\ &\leq M(|\Delta x| + |\Delta y|) < 2M\delta < \varepsilon, \text{ если } |\Delta x| < \delta, |\Delta y| < \delta, \end{aligned}$$

а δ выбирать из условия $\delta < \frac{\varepsilon}{2M}$.

152. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку существует конечный предел $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = A$, то найдётся число $a_0 > a$ такое, что $|f(x, y) - A| < \frac{\varepsilon}{4}$

для любой точки (x, y) , удовлетворяющей условию $x^2 + y^2 \geq a_0^2$.

Представим множество $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq a^2\}$ в виде объединения двух множеств $D_1 = \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq a_0^2\}$ и $D_2 = \{(x, y) \mid a_0^2 \leq x^2 + y^2 < +\infty\}$.

В силу существования предела, для любых точек (x', y') и (x'', y'') , принадлежащих D_2 , имеет место неравенство

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq |f(x', y') - A| + |A - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, так как множество D_1 замкнуто и ограничено (компакт), а функция $f(x, y)$ непрерывна на нём, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на D_1 . Следовательно, для выбранного ε найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек (x', y') и (x'', y'') из D_1 , расстояние между которыми меньше δ , справедливо неравенство $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Отсюда следует, что для любых точек (x', y') , (x'', y'') из D будет выполняться неравенство $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$, как только расстояние между ними окажется меньше δ . А это и означает равномерную непрерывность $f(x, y)$ на множестве D .

153. Согласно определению равномерной непрерывности на D , достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: для любых $M', M'' \in D$, $\rho(M', M'') < \delta$ выполняется неравенство $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим цепочку неравенств

$$|f(M') - f(M'')| \leq L \cdot \rho(M_1, M_2) < L \cdot \delta < \varepsilon.$$

Отсюда видно, что если по заданному ε выбрать δ , удовлетворяющее условию $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{L}$, то определение, очевидно, выполняется.

154. Например, $f(x, y) = x + y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

155. Например, $f(x, y) = x^2 e^{-x} + y^2 e^{-y}$, $f(x, y) = e^{-x-y}$.

156. 1-й способ (по определению). Функция $u = 2x - 3y + 5$ является равномерно непрерывной на плоскости $\mathbb{R}^2$, если $\forall \varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: для произвольных $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$, $\rho(M', M'') < \delta$ выполняется

$$|(2x' - 3y' + 5) - (2x'' - 3y'' + 5)| < \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, как найти δ :

$$|(2x' - 3y' + 5) - (2x'' - 3y'' + 5)| \leq 2|x' - x''| + 3|y' - y''| < 2\delta + 3\delta < \varepsilon,$$

если в качестве $\delta > 0$ выбрать любое число, меньшее $\frac{\varepsilon}{5}$.

2) 2-й способ. Так как частные производные функции $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3$ ограничены, то по теореме 3 (п. 3.3) функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^2$.

157. Зафиксируем $y = 0$ и рассмотрим $f(x, 0) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Достаточно показать, что эта функция не является равномерно непрерывной, тогда по теореме 6 (п. 3.3) функция $f(x, y)$ не будет равномерно непрерывной на $\mathbb{R}^2$. По определению, покажем, что $\exists \varepsilon > 0$: $\forall \delta > 0 \exists x', x'' : |x' - x''| < \delta$, но $|x'^2 - x''^2| \geq \varepsilon$. Пусть $x'_n = \sqrt{n}$, $x''_n = \sqrt{n+1}$. Тогда $|x'_n - x''_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, но $|x_n'^2 - x_n''^2| = 1$, т. е. $\varepsilon = 1$.

158. Так как частные производные функции f'_x, f'_y ограничены

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2}} = 1$$

(для f'_y аналогично), то по теореме 3 (п. 3.3) функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^2$.

159. Поскольку функция $f(x, y)$ всюду непрерывна и $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2) e^{-|xy|} = 0$

(см. решение этой задачи в теме, посвящённой пределу функций многих переменных), то по теореме 4 (п. 3.3) эта функция является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}^2$.

160. 1-й способ. Изобразив на плоскости Oxy множество E , заметим, что на этом множестве функция не определена лишь в граничной его точке $M_0(-1, 1)$. Если же удалить эту точку из множества E вместе с малой окрестностью $\rho(M_0, M) < \delta$, то на оставшемся замкнутом и ограниченном множестве функция непрерывна, а значит (по теореме Кантора) равномерно непрерывна. Следовательно, равномерная непрерывность может нарушаться лишь в окрестности точки M_0 . Тогда рассмотрим две последовательности точек $M'_k(-1 + \frac{1}{k}; 1)$, $M''_k(-1 + \frac{1}{2k}; 1)$, сходящихся к точке M_0 , и покажем, что определение равномер-

ной непрерывности не выполняется¹. Очевидно, что для сколь угодно малого $\delta > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \rho(M'_k, M''_k) = \frac{1}{2k} < \delta$, но при этом $|f(M'_k) - f(M''_k)| = k \rightarrow +\infty$.

2 способ. Исследуем функцию на непрерывность по переменной x в точке $M_0(-1, 1)$: $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x, 1) = -\infty \neq 0 = f(-1, 1)$. Значит, функция терпит разрыв в этой точке. Но функция, не являющаяся непрерывной хотя бы по одной из своих переменных на некотором множестве, не может быть на нём равномерно непрерывной.

161. Покажем ограниченность частных производных:

$$|f'_x(x, y)| = \left| \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{2x}{1 + x^2} \right| \leq 1.$$

Аналогично для $|f'_y(x, y)|$. В силу теоремы 3 (п. 3.3), функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^2$.

162. Так как функция непрерывна, то по теореме Кантора в круге $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($a > 0$) функция будет равномерно непрерывна при любом сколь угодно большом a . Следовательно, равномерная непрерывность может нарушаться лишь в окрестности бесконечно удалённой точки $|x| \rightarrow +\infty, |y| \rightarrow +\infty$. Рассмотрим функцию на подмножестве $D = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ и покажем, что функция не является равномерно непрерывной на D . Отсюда в силу теоремы 6 (п. 3.3) будет следовать, что функция не является равномерно непрерывной и на $\mathbb{R}^2$. В самом деле, возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и рассмотрим две последовательности точек $M'_k(\sqrt{k}; 0), M''_k(\sqrt{k+1}; 0), k \in \mathbb{N}$, расходящихся к $(+\infty, 0)$. Покажем, что на этой полупрямой определение равномерной непрерывности не выполняется. Очевидно, что для сколь угодно малого $\delta > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \rho(M'_k, M''_k) = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \delta$, но при этом $|f(M'_k) - f(M''_k)| = 1 > \varepsilon$.

163. Так как функция непрерывна, то по теореме Кантора в круге $x^2 + y^2 \leq a^2$ (при любом сколь угодно большом $a > 0$) функция будет равномерно непрерывна. Следовательно, равномерная непрерывность может нарушаться лишь в окрестности бесконечно удалённой точки $|x| \rightarrow +\infty, |y| \rightarrow +\infty$. Рассмотрим функцию на подмножестве $D = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, там она принимает вид $\sin(x^2)$. Покажем, что эта функция не является равномерно непрерывной на D . Отсюда в силу теоремы 6 (п. 3.3) будет следовать, что функция не является равномерно непрерывной и на $\mathbb{R}^2$. В самом деле, возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и рассмотрим две последовательности точек $M'_k(\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}; 0), M''_k(\sqrt{2\pi k}; 0), k \in \mathbb{N}$, расходящихся к $(+\infty, 0)$. Покажем, что на этой полупрямой определение равномерной непрерывности не выполняется. Очевидно, что для сколь угодно малого $\delta > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \rho(M'_k, M''_k) = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi k} - \sqrt{2\pi k} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi k} + \sqrt{2\pi k}} < \delta$, но при этом $|f(M'_k) - f(M''_k)| = 1 > \varepsilon$.

¹Согласно определению, функция $f(x, y)$ не является равномерно непрерывной на множестве E , если $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists M', M'' \in E : \rho(M', M'') < \delta$, но $|f(M') - f(M'')| \geq \varepsilon$.

164. Так как функция непрерывна, то по теореме Кантора в круге $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($a > 0$) функция будет равномерно непрерывна при любом сколь угодно большом a . Следовательно, равномерная непрерывность может нарушаться лишь в окрестности бесконечно удалённой точки $|x| \rightarrow +\infty, |y| \rightarrow +\infty$. Покажем ограниченность частных производных, тогда по теореме 3 (п. 3.3) функция будет равномерно непрерывной на всей плоскости. В самом деле, в окрестности бесконечно удалённой точки имеем

$$\left(\sin \sqrt{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{x \cdot \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{но} \quad \left| \frac{x \cdot \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1.$$

Аналогично со второй частной производной.

165. Разобьём плоскость на две замкнутые области с общей границей: $x^2 + y^2 \leq a^2$ (при некотором $a > 0$) и $x^2 + y^2 \geq a^2$. Достаточно доказать равномерную непрерывность в каждой из этих областей. В круге функция является равномерно непрерывной по теореме Кантора. Во внешней части круга покажем ограниченность частных производных:

$$|f'_x(x, y)| = \left| \frac{1}{1 + (x^4 + y^2)^2} \cdot 4x^3 \right| \leq \frac{4|x|^3}{1 + x^8} \leq \frac{4|x|^3}{x^8} = \frac{4}{|x|^5} \leq \frac{4}{a^5}.$$

Аналогично для $|f'_y(x, y)|$:

$$|f'_y(x, y)| = \left| \frac{1}{1 + (x^4 + y^2)^2} \cdot 2y \right| \leq \frac{2|y|}{1 + y^4} \leq \frac{2|y|}{y^4} = \frac{2}{|y|^3} \leq \frac{2}{a^3}.$$

В силу теорем 3 и 7 (п. 3.3), функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^2$. Можно было также воспользоваться теоремой 4.

166. Замыканием множества D является замкнутый круг $\overline{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. В точках окружности $x^2 + y^2 = 1$ функция не имеет особенностей и может быть доопределена непрерывным образом. Покажем, что этого нельзя сделать в центральной точке окружности, так как предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$ не существует. Рассмотрим две последовательности точек $M'_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ и $M''_n(0, \frac{1}{n})$, сходящиеся при $n \rightarrow +\infty$ к точке $(0, 0)$. При этом $f(M'_n) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$, а $f(M''_n) = 0 \rightarrow 0$. Противоречие с единственностью предела. В силу теоремы 5 (п. 3.3) функция не является равномерно непрерывной на множестве D .

На множестве G функция является равномерно непрерывной, поскольку возможно доопределение до непрерывной в граничных точках.

167. Замыканием множества D является замкнутый круг $\overline{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. В точках окружности $x^2 + y^2 = 1$ функция не имеет особенностей и может быть доопределена непрерывным образом. Проверим выполнение

условия непрерывности функции в точке $(0, 0)$: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(xy \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0$. То

есть функцию можно доопределить по непрерывности и в этой точке, положив её значение равным нулю. Это означает, в силу теоремы 5 (п. 3.3), что функция является равномерно непрерывной на множестве D .

168. Разобьём плоскость (без точки $(0, 0)$) на две части: $A = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ и $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$, объединение которых есть данное в условии множество, и исследуем функцию на равномерную непрерывность на каждой из них. Поскольку при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ имеем $\sin(x^2 + y^2) \sim x^2 + y^2$, $\ln(x^2 + y^2 + 1) \sim x^2 + y^2$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 1$, а

это означает, что функцию можно доопределить в точке $(0, 0)$ непрерывным образом и по теореме 5 (п. 3.3) она равномерно непрерывна на множестве A . Далее, на множестве B существует конечный предел $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = 0$, что

по теореме 4 (п. 3.3) означает равномерную непрерывность функции на этом множестве. Но тогда по теореме 7 (п. 3.3) функция является равномерно непрерывной на объединении этих множеств.

169. В силу оценки $|\sqrt[3]{xy}| \leq \sqrt[3]{\frac{x^2 + y^2}{2}}$ имеем

$$|f(x, y)| \leq \sqrt[3]{\frac{x^2 + y^2}{2}} \cdot \ln(x^2 + y^2) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0.$$

Следовательно, в точке $(0, 0)$ функцию можно доопределить непрерывным образом. Так как на границе круга функция не имеет особенностей и её также можно доопределить до непрерывной предельными значениями, то по теореме 5 (п. 3.3) функция является равномерно непрерывной на указанном множестве.

170. Покажем, что функция имеет конечный предел при $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$ и тогда по теореме 4 (п. 3.3) она будет равномерно непрерывной на указанном множестве. В самом деле, в силу неравенства $|\sin a| \leq |a|$ имеем (при $x^2 + y^2 \geq 1$)

$$|f(x, y)| \leq \frac{\sqrt[3]{x^2 y^2}}{x^2 + y^2}, \quad \text{но } \sqrt[3]{x^2 y^2} \leq \sqrt[3]{\frac{x^4 + y^4}{2}} \leq \left(\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Значит, $|f(x, y)| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2(x^2 + y^2)}} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$.

171. Функция $f_1(x, y) = 1 - 2x + 4y$ равномерно непрерывна на указанном множестве как функция с ограниченными частными производными. Функция $f_2(x, y) = \sqrt[3]{xy} \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ также является равномерно непрерывной, поскольку

она непрерывна на этом множестве и существует конечный предел

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\sqrt[3]{xy} \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{\sqrt[3]{xy}}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{x^2 + y^2}}{\frac{1}{x^2 + y^2}} \right) = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{\sqrt[3]{xy}}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{\sqrt[3]{xy}}{xy} \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{(xy)^{2/3}} \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

т. к. функция $\frac{1}{(xy)^{2/3}}$ является бесконечно малой, а $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ — ограниченная ($\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$). Сумма равномерно непрерывных функций является равномерно непрерывной функцией.

172. Выясним, можно ли доопределить функцию до непрерывной в точке $(0, 0)$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(xy \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = \left| \begin{matrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{matrix} \right| = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \left(r^2 \cos \varphi \sin \varphi \sin \frac{1}{r^2} \right).$$

Так как $\cos \varphi \sin \varphi \sin \frac{1}{r^2}$ — ограниченная функция, а $r^2 \rightarrow 0$, то предел равен нулю. Следовательно, функцию можно доопределить, положив $f(0, 0) = 0$. Далее, в точках $x^2 + y^2 = 1$ функция не имеет особенностей, поэтому в этих точках её также можно доопределить по непрерывности. Тогда получим функцию, непрерывную на замкнутом ограниченном множестве $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, которая по теореме Кантора будет равномерно непрерывной на $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, а значит, и на $0 < x^2 + y^2 < 1$.

173. На границе $x^2 + y^2 = 1$ функцию можно доопределить по непрерывности. Покажем, что это можно сделать и в точке $(0, 0)$. В самом деле, так как $|\arctg \alpha| \leq |\alpha|$, то

$$\left| \arctg \sqrt{x^2 + y^4} \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \arctg \sqrt{x^2 + y^4} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^4} \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$. Следовательно, по теореме 5 (п. 3.3) функция является равномерно непрерывной на указанном множестве.

174. Покажем, что в точке $(0, 0)$ функцию нельзя доопределить непрерывным образом. Тогда по теореме 5 (п. 3.3) это будет означать, что функция не является равномерно непрерывной на указанном множестве. В самом деле, рассмотрим предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2}}{x^2 + y^2} =$$

(перейдём к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$)

$$= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{\sqrt{r^4 - 2r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}}{r^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\varphi)}.$$

Значение данного предела существенным образом зависит от φ , т. е. предел в данной точке не существует, а значит, доопределить функцию до непрерывной на множестве нельзя.

175. Непрерывность функции следует из теоремы о непрерывности суперпозиции непрерывных функций. По определению, функция f не является равномерно непрерывной на указанном множестве, если $\forall \delta > 0 \exists M', M'' \in E$ такие, что $\rho(M', M'') < \delta$, но $|f(M') - f(M'')| > \varepsilon$.

Выберем две последовательности точек: $M'_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ и $M''_n(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$ ($n \in \mathbb{N}$). Очевидно, что $M'_n \rightarrow (0, 0)$, $M''_n \rightarrow (0, 0)$ при $n \rightarrow +\infty$, а поэтому для любого $\delta > 0$ найдётся номер n_0 : $\forall n \geq n_0 \rho(M', M'') < \delta$. С другой стороны, вычислим $|f(M') - f(M'')| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon$, если взять $0 < \varepsilon < 1$. То есть функция не является равномерно непрерывной на E . Можно было рассмотреть значения функции на прямых $y = kx$. Теорема Кантора не применима, так как нарушено условие замкнутости множества E .

176. На внешней границе квадрата $\{(x, y) \mid 0 < |x| < 1, 0 < |y| < 1\}$ с выколотым центром функцию $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ можно доопределить по непрерывности, однако в точке $(0, 0)$ функция не имеет предела (см. решение задачи в разделе, посвящённом пределу функций многих переменных), поэтому доопределить её в этой точке до непрерывной нельзя. В силу теоремы 5 (п. 3.3), функция не является равномерно непрерывной на данном множестве.

177. Данное множество (в полярных координатах $0 < r \leq \sqrt{\cos 2\varphi}$) ограничено лемнискатой Бернулли. Функция непрерывна во всех точках, кроме точки $(0, 0)$, где она не определена. Но поскольку предел в этой точке существует и равен 1 (см. решение задачи в материалах семинара, связанного с пределом функции многих переменных), то функцию можно доопределить до непрерывной на множестве $r \leq \sqrt{\cos 2\varphi}$. Так как функция равномерно непрерывна на замыкании множества E , то в силу теоремы 5 (п. 3.3) она равномерно непрерывна и на множестве E .

178. Рассмотрим область $A = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ и исследуем на ней функцию на равномерную непрерывность. Поскольку при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ имеем $\operatorname{arctg}(|x| + |y|) \sim |x| + |y|$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 1 \neq f(0, 0)$, а это означает,

что функция имеет в точке $(0, 0)$ неустранимый разрыв. Следовательно, её нельзя доопределить в этой точке непрерывным образом. Но тогда по теореме 5 (п. 3.3) функция не является равномерно непрерывной в области A . По теореме 6 (п. 3.3) отсюда следует, что функция не может быть равномерно непрерывной на всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

4 СЕМИНАР: Дифференцируемость функции многих переменных. Частные производные и дифференциал

«Невозможно избавиться от чувства, что математические формулы живут собственной жизнью и обладают собственным разумом, что они умнее нас, умнее даже тех, кто их открыл, что мы получаем из этих формул больше, чем в них было изначально заложено».

Генрих Герц (нем. Heinrich Hertz; 1857–1894) – немецкий физик.

С целью защиты авторских прав НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Для функций многих переменных вместо привычной производной, как это было в случае функций одной переменной, возникает понятие частных производных – производных по каждой из переменных при фиксированных остальных переменных. Кроме того, вводится понятие производной по любому из бесконечного числа направлений, выходящих из данной точки. Однако, в отличие от одномерного случая, существование в точке конечных частных производных по всем переменным уже не гарантирует дифференцируемости функции в этой точке.

Рассмотрим вопросы, связанные с дифференцируемостью функций многих переменных и её приложениями. Введём необходимые понятия.

4.1 Понятие частных производных функции m переменных

Пусть $M_0(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_m^\circ)$ – внутренняя точка области определения D функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Зафиксировав в этой точке все переменные, кроме x_k ($1 \leq k \leq m$), дадим приращение Δx_k этому аргументу¹ и рассмотрим отвечающее ему частное приращение функции по этой переменной:

$$\Delta_k u = f(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_{k-1}^\circ, x_k^\circ + \Delta x_k, x_{k+1}^\circ, \dots, x_m^\circ) - \\ - f(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_{k-1}^\circ, x_k^\circ, x_{k+1}^\circ, \dots, x_m^\circ).$$

Опр. 1 (частной производной по переменной x_k). Если при $\Delta x_k \rightarrow 0$ существует предел отношения частного приращения функции к (порождающему

¹Приращение Δx_k выберем произвольным, не равным нулю и небольшим – настолько, чтобы оставаться в пределах множества D .

его) частному приращению аргумента

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k u}{\Delta x_k},$$

то он называется *частной производной* (1-го порядка) функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в точке M_0 по переменной x_k и обозначается одним из следующих способов:¹

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{M=M_0}, \quad u'_{x_k}(M_0), \quad f'_{x_k}(M_0).$$

По сути, частная производная $f'_{x_k}(M)$ представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x_k при фиксированных значениях остальных переменных и, соответственно, показывает скорость изменения функции вдоль этой координатной оси. Поэтому вычисление частных производных производится по обычным правилам вычисления производных функции одной переменной.

По аналогии с непрерывно дифференцируемыми функциями одной переменной, класс функций нескольких переменных, имеющих непрерывные частные производные 1-го порядка в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^m$, обозначается $C^1(D)$.

Пример 82. Найти в произвольной точке (x, y) все частные производные 1-го порядка функции

$$u = \arctg(xy^2).$$

Решение. При вычислении частной производной по переменной x вторая из переменных (y) считается фиксированной (постоянным числом) и мы дифференцируем функцию как функцию одной переменной x , в результате получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{1+x^2y^4}$. Для нахождения второй частной производной фиксируем x и полученную функцию переменной y дифференцируем по y : $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{1+x^2y^4}$. $\square$

Пример 83. Вычислить частные производные 1-го порядка функции

$$u(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i^2).$$

Решение. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \left(\prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n (1 + x_i^2) \right) \cdot 2x_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad \square$$

¹Обратите внимание на обозначения: частные производные обозначаются при помощи 'скруглённой' буквы « ∂ » ($\frac{\partial f}{\partial x}$), в отличие от производной функции одной переменной, обозначаемой 'прямой' буквой « d » ($\frac{df}{dx}$).

В тех случаях, когда обычные правила дифференцирования не дают результата (не применимы), используют определения частных производных.

Пример 84. Найти частные производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$, если

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}.$$

Решение. Попробуем вначале продифференцировать по переменной x обычным способом: $f'_x(x, y) = \sqrt[3]{y} \cdot (\sqrt[3]{x})'_x = \sqrt[3]{y} \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Но как тогда посчитать $f'_x(0, 0)$? Очевидно, этой формулой нельзя пользоваться в точке $(0, 0)$. В этом случае вычислим производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$, используя определения этих производных:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot \Delta y} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Получили, что производные существуют и равны нулю. $\square$

Заметим, что из существования у функции в данной точке всех частных производных не вытекает, вообще говоря, не только дифференцируемость (как мы увидим дальше), но даже непрерывность функции в этой точке.

Пример 85. Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $(0, 0)$ (достаточно рассмотреть непрерывность вдоль прямой $y = kx$, $k \neq 0$). Однако в этой точке функция имеет обе частные производные по x и y , которые можно найти по определению:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0. \quad \square$$

4.2 Понятие дифференцируемости функции m переменных. Первый дифференциал

*«Есть три способа отвечать на вопросы:
сказать необходимое, отвечать с приветливостью
и наговорить лишнего».*

*Плутарх (ок. 46 – ок. 127) – древнегреческий философ,
биограф, моралист.*

Понятие дифференцируемой функции многих переменных вводится во многом аналогично понятию дифференцируемой функции одной переменной, но, как часто бывает, при обобщении возникают новые особенности, которых не было (или не было заметно, не акцентировалось внимание) у обобщаемого понятия.

Пусть M_0 , по-прежнему, внутренняя точка области определения D функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$. Дадим в этой точке всем m переменным (небольшие ненулевые) приращения $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ и рассмотрим отвечающее им *полное приращение* функции:

$$\Delta u(M_0) = f(x_1^\circ + \Delta x_1, \dots, x_m^\circ + \Delta x_m) - f(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ).$$

Опр. 2 (*дифференцируемости в точке*). Функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется *дифференцируемой* в точке M_0 , если её полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta u(M_0) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \quad (1)$$

где $A_1, \dots, A_m$ — некоторые зависящие от точки M_0 , но не зависящие от $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ числа, $\alpha_k = \alpha_k(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$, $k = \overline{1, m}$, — бесконечно малые при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ функции.

Соотношение (1) называется *условием дифференцируемости* функции в данной точке. Его можно записать в ином виде. Введём для этого бесконечно малую при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ функцию

$$\rho(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2},$$

тогда $\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho)$ и условие дифференцируемости в точке M_0 принимает более простой вид

$$\Delta u(M_0) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho).$$

Сумма $A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m$ представляет собой главную, линейную относительно приращений аргументов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ часть полного приращения функции и называется *дифференциалом* (1-го порядка) функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в точке M_0 . Для дифференциала принято обозначение: $du(M_0)$, или $df(M_0)$.

Далее, поскольку частное приращение $\Delta_k u$ функции по переменной x_k в точке M_0 равно $\Delta_k u = A_k \Delta x_k + \alpha_k \Delta x_k$, то $\frac{\Delta_k u}{\Delta x_k} = A_k + \alpha_k$. Поэтому, так как $\alpha_k \rightarrow 0$ при $\Delta x_k \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k u}{\Delta x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k} = A_k.$$

Таким образом, получили, что если функция дифференцируема в точке M_0 , то $A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)$, ..., $A_m = \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)$ и условие дифференцируемости можно переписать в виде

$$\Delta f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0) \cdot \Delta x_m + o(\rho).$$

Пример 86. Выписать условие дифференцируемости в точке $M(x_0, y_0)$ в случае функции двух переменных $u = f(x, y)$.

Решение. Вычислим вначале в точке $M(x_0, y_0)$ обе частные производные:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

(можно использовать и другую форму записи этих пределов:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \quad f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}).$$

Тогда условие дифференцируемости принимает вид

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, или, в эквивалентном виде,

$$\Delta f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y = o(\rho).$$

Частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$ показывают скорости изменения функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) вдоль координатных осей Ox и Oy соответственно. $\square$

Опр. 3 (*дифференциала первого порядка в точке*). Главная, линейная относительно $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, часть полного приращения функции называется *полным дифференциалом 1-го порядка* функции f в точке M_0 и обозначается

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0) \cdot \Delta x_m.$$

Учитывая, что в случае независимых переменных $x_1, \dots, x_m$ приращения аргументов совпадают с их дифференциалами $\Delta x_1 = dx_1, \dots, \Delta x_m = dx_m$, получаем, что первый дифференциал в точке M_0 принимает окончательный (стандартный) вид

$$df(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_m} dx_m,$$

или, в других обозначениях,

$$du(M_0) = f'_{x_1}(M_0)dx_1 + \dots + f'_{x_m}(M_0)dx_m. \quad (2)$$

Замечание. Первый дифференциал имеет вид (2) как в случае, когда все переменные $x_1, \dots, x_m$ независимы между собой, так и в случае, когда они являются функциями некоторых других переменных. Это свойство иногда называют *свойством инвариантности* первого дифференциала. Дифференциалы более высоких порядков этим свойством, вообще говоря, уже не обладают.

Пример 87. Найти полный дифференциал первого порядка в точке $(0, 1)$ функции

$$f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + 3y.$$

1-й способ. Найдём первый дифференциал по определению. Для этого выпишем полное приращение функции в указанной точке и выделим в этом выражении линейную по Δx и Δy группу, записывая остальное в виде $o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$:

$$\begin{aligned} \Delta f(0, 1) &= f(\Delta x, 1 + \Delta y) - f(0, 1) = (\Delta x^3 - 2\Delta x(1 + \Delta y)^2 + 3(1 + \Delta y)) - 3 = \\ &= (-2\Delta x + 3\Delta y) + (\Delta x^3 - 4\Delta x\Delta y - 2\Delta x\Delta y^2) = -2\Delta x + 3\Delta y + o(\rho), \end{aligned}$$

Отсюда первый дифференциал в точке имеет вид $df(0, 1) = -2\Delta x + 3\Delta y$. Принимая во внимание, что для независимых переменных их дифференциалы совпадают с их приращениям, окончательно получаем

$$df(0, 1) = -2dx + 3dy.$$

2-й способ. Воспользуемся стандартной формулой (2):

$$\begin{aligned} df(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy = \\ &= ((3x^2 - 2y^2)dx + (-4xy + 3)dy) \Big|_{(0,1)} = -2dx + 3dy. \end{aligned}$$

3-й способ (непосредственное дифференцирование). Продифференцируем (возьмём дифференциал от левой и правой частей) равенство $f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + 3y$:

$$\begin{aligned} df(x, y) &= d(x^3 - 2xy^2 + 3y) \Leftrightarrow df(x, y) = d(x^3) - 2d(xy^2) + 3dy = \\ &= 3x^2dx - 2(y^2dx + x \cdot 2ydy) + 3dy = ((3x^2 - 2y^2)dx + (-4xy + 3)dy) \Big|_{(0,1)} = -2dx + 3dy. \quad \square \end{aligned}$$

Дифференцируемость на множестве. Добавим, что функцию, дифференцируемую в каждой точке некоторого множества, называют *дифференцируемой на этом множестве*.

Пример 88. Функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ дифференцируема в открытом круге $x^2 + y^2 < 1$. $\square$

4.3 Матрица Якоби, функциональный определитель (якобиан)

Пусть D – область в $\mathbb{R}^m$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – дифференцируемая в D векторная функция (система функций). Тогда *матрицей Якоби* отображения f называют матрицу

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix},$$

состоящую из частных производных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ и обозначаемую также $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_m)}$.

В частном случае $n = 1$ матрица Якоби состоит из одной строки: этот вектор в $\mathbb{R}^m$ называется *градиентом* функции f в точке $(x_1, \dots, x_m)$ и обозначается

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right).$$

В общем случае системы функций их матрица Якоби состоит из строк, являющихся градиентами этих функций.

Пример 89. Выписать матрицу Якоби для функции

$$f : (u, v) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

где $x_1 = \arctg \frac{u}{v}$, $x_2 = \ln(u^2 + v^2)$, $x_3 = uv^2$, $x_4 = u^2v$ в области $D = \{(u, v) \mid u \in \mathbb{R}, v > 0\}$.

Решение. Находя производные функций x_1, x_2, x_3, x_4 по u, v , получаем матрицу

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \\ \frac{\partial x_4}{\partial u} & \frac{\partial x_4}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{u^2+v^2} & -\frac{u}{u^2+v^2} \\ \frac{2u}{u^2+v^2} & \frac{2v}{u^2+v^2} \\ v^2 & 2uv \\ 2uv & u^2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Если $n = m$, то матрица Якоби отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($D \subseteq \mathbb{R}^m$) становится квадратной, её определитель называется *якобианом* отображения f и обозначается $|J_f|$.¹

Пример 90. Найти якобиан отображения

$$f : (u, v, w) \rightarrow (x, y, z),$$

¹Якобиан (определитель Якоби, функциональный определитель) — одно из обобщений производной функции одной переменной на случай отображений из евклидова пространства в себя.

где $x = uv \cos w$, $y = uv \sin w$, $z = u + v + w$.

Решение. Вычисляя производные функций x, y, z по u, v и w , находим якобиан

$$|J_f| = \begin{vmatrix} v \cos w & u \cos w & -uv \sin w \\ v \sin w & u \sin w & uv \cos w \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = uv(u - v). \quad \square$$

Геометрический смысл якобиана. Если функции $x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_m(u_1, \dots, u_m)$ определяют преобразование координат $(x_1, \dots, x_m) \rightarrow (u_1, \dots, u_m)$ в пространстве $\mathbb{R}^m$, то смысл определителя Якоби состоит в отношении объёмов параллелепипедов, «натянутых» на $dx_1, \dots, dx_m$ и на $du_1, \dots, du_m$ при равенстве произведений $dx_1 dx_2 \dots dx_m = du_1 du_2 \dots du_m$.¹

Свойства якобиана.

1. (О взаимной однозначности отображения с не равным нулю якобианом). Если якобиан $|J_f|$ преобразования f не равен нулю в любой внутренней точке некоторой области D , то это преобразование устанавливает взаимно однозначное соответствие между данной областью и её образом $f(D)$.²

2. (О функциональной зависимости системы функций). Якобиан системы (дифференцируемых) функций $\{f_1, \dots, f_m\}$ тождественно равен нулю в некоторой области D (т. е. $\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \equiv 0$ при $x \in D$) тогда и только тогда, когда между этими функциями имеется функциональная зависимость в D , т. е. существует функция $G(y_1, \dots, y_m) \not\equiv 0$ такая, что

$$G(f_1(x), \dots, f_m(x)) \equiv 0.$$

3. Якобиан системы сложных (дифференцируемых) функций

$$F_1(x_1, \dots, x_m) = f_1(y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_m(x_1, \dots, x_m)),$$

¹Абсолютное значение Якобиана $\left| \frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} \right|$ в некоторой точке $u = (u_1, \dots, u_m)$ равно коэффициенту искажения объёмов в этой точке, т. е. пределу отношения объёма образа окрестности точки u к объёму самой окрестности, когда размеры окрестности стремятся к нулю. Якобиан в точке u положителен, если отображение x не меняет ориентации пространства в окрестности точки, и отрицателен в противоположном случае. Это используется в интегральном исчислении функций многих переменных в формуле замены переменных: интеграл по области X , образом которой является область U , при условии неравенства якобиана нулю преобразуется как

$$\int_X f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = \int_U f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_m(u_1, \dots, u_m)) \left| \frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} \right| du_1 \dots du_m.$$

²Будем называть такие преобразования невырожденными в D . Таким образом, неравенство определителя Якоби нулю в некоторой точке служит необходимым и достаточным условием локальной невырожденности данного преобразования.

$$F_m(x_1, \dots, x_m) = f_m(y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_m(x_1, \dots, x_m))$$

вычисляется по правилу умножения:

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} = \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \cdot \frac{D(y_1, \dots, y_m)}{D(x_1, \dots, x_m)},$$

где производные вычислены в соответствующих точках, т. е. коэффициент искажения суперпозиции (произведения) отображений равен произведению коэффициентов искажений промежуточных (вспомогательных) отображений.¹

4. (О функциональных определителях и матрицах прямого и обратного отображений). Если якобиан $|J|$ (дифференцируемого) отображения $x_1 = x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_m = x_m(u_1, \dots, u_m)$ не равен нулю в некоторой точке, то для обратного отображения, задаваемого системой функций $u_1 = u_1(x_1, \dots, x_m), \dots, u_m = u_m(x_1, \dots, x_m)$, имеем

$$\frac{D(u_1, \dots, u_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} = \frac{1}{\frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(u_1, \dots, u_m)}}, \quad (3)$$

а матрица Якоби обратного преобразования будет, соответственно, обратной для матрицы исходного отображения.²

4.4 Геометрический смысл дифференцируемости и дифференциала функции в точке

Сформулируем понятие касательной плоскости к поверхности. Плоскость, проходящая через точку M_0 поверхности, называется *касательной плоскостью* в этой точке к поверхности, если угол между этой плоскостью и секущей (прямой), проходящей через точку M_0 и любую точку M поверхности, стремится к нулю, когда точка M стремится к точке M_0 .

Теорема (о связи дифференцируемости с существованием касательной плоскости). Если функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$, то поверхность, задаваемая этой функцией (график функции), имеет в точке $(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ, u^\circ)$, где $u^\circ = f(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$, касательную плоскость, причём уравнение этой касательной плоскости имеет вид:

$$u - u^\circ = f'_{x_1}(M_0)(x - x_1^\circ) + \dots + f'_{x_m}(M_0)(x - x_m^\circ).$$

¹Промежуточные отображения являются дифференцируемыми.

²Последнее соотношение (3) очень наглядно с точки зрения отображений: при переходе с гиперплоскости $Ou_1 \dots u_m$ на гиперплоскость $Ox_1 \dots x_m$ коэффициент искажения должен быть, разумеется, обратным коэффициенту искажения при переходе с гиперплоскости $Ox_1 \dots x_m$ на гиперплоскость $Ou_1 \dots u_m$, а знаки якобианов должны быть одинаковыми.

В случае функции двух переменных условие дифференцируемости имеет наглядную геометрическую интерпретацию. А именно, из дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ вытекает существование обычной *касательной плоскости* в трёхмерном пространстве. При этом полное приращение функции z в точке M_0 $\Delta z(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ геометрически представляет собой приращение аппликаты z , отвечающее приращением Δx и Δy независимых переменных x и y . А дифференциал функции dz есть приращение аппликаты касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в данной точке.

4.5 Приближённые вычисления с помощью первого дифференциала

Рассмотрим на примере функции двух переменных, как можно в прикладных задачах использовать первый дифференциал при приближённых вычислениях. Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , т. е. выполняется равенство

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Так как последнее слагаемое в правой части является бесконечно малой более высокого порядка, чем ρ , то при малых приращениях переменных x и y последнее слагаемое в этой формуле можно отбросить (пренебречь), заменив точное равенство приближённым. Таким образом, получаем формулу для приближённых вычислений:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Эта формула будет тем точнее, чем меньше приращения переменных.

Обратимся к примеру на применение этого приёма.

Пример 91. Вычислить приближённо значение числового выражения

$$\sqrt{(2,98)^2 + (4,01)^2}.$$

Решение. Введём функцию $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. По условию необходимо вычислить значение функции $f(2,98; 4,01)$. Округляя до целого, выберем близкую к точке $(2,98; 4,01)$ точку $(3, 4)$ ($x_0 = 3, y_0 = 4$), в которой значения функции, а также её частных производных, вычисляются проще. Формула для приближённых вычислений примет вид

$$f(2,98; 4,01) \approx f(3, 4) + f'_x(3, 4) \cdot \Delta x + f'_y(3, 4) \cdot \Delta y.$$

Здесь приращения аргументов имеют вид $\Delta x = 2,98 - 3 = -0,02$, $\Delta y = 4,01 - 4 = 0,01$. Значение функции $f(3, 4) = 5$. Наконец, вычислим частные производные:

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(3,4)} = \frac{3}{5} = 0,6; \quad f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(3,4)} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Подставляя всё в формулу, получаем

$$f(2,98; 4,01) \approx 5 - 0,6 \cdot 0,02 + 0,8 \cdot 0,01 = 4,996. \quad \square$$

Когда мы познакомимся с формулой Тейлора, то увидим, как можно аппроксимировать функции их многочленами Тейлора, достигая необходимой точности приближения.

Рассмотрим далее вопрос об исследовании функций многих переменных на дифференцируемость в заданной точке.

4.6 Исследование функций на дифференцируемость. Условие дифференцируемости в форме предела

«Математик — это человек, который не только сразу же схватывает чужую мысль, но также видит, из какой логической ошибки она вытекает».

Хельмут Нар (1920–2004) – немецкий и австралийский фотограф и фотохудожник.

На практике удобно сводить исследование функции нескольких переменных к проверке равенства нулю некоторого предела. Продемонстрируем этот приём на примере функции двух переменных $u = f(x, y)$. Выше мы получили условие дифференцируемости функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ в виде

$$\Delta f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x - f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y = o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.¹ Раскрывая понятие «о»-малого, обнаруживаем, что исследование функции на дифференцируемость в точке M_0 сводится к проверке равенства нулю следующего предела²

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x - f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Функция является дифференцируемой в точке M_0 тогда и только тогда, когда этот предел существует и *равен нулю*. В противном случае функция не будет дифференцируема в указанной точке.

¹Записи $(\Delta x)^2$ и Δx^2 эквивалентны.

²Этот же предел можно представить в компактном виде $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(x_0, y_0) - df(x_0, y_0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$

Пример 92. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \sqrt[5]{x^6 y^7}.$$

Решение. *1-й способ.* По определению, функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , если её приращение в этой точке $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ можно представить в виде: $\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. В данном случае $\Delta f(0, 0) = \sqrt[5]{\Delta x^6 \cdot \Delta y^7}$,

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{\Delta x^6 \cdot 0^7} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{0^6 \cdot \Delta y^7} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Решение задачи сводится к проверке равенства нулю предела

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot \Delta x - f'_y(0, 0) \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\ & = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[5]{\Delta x^6 \Delta y^7} - 0 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[5]{\Delta x^6 \Delta y^7}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}. \end{aligned}$$

Так как можно считать $|\Delta x| < 1$, $|\Delta y| < 1$, то равенство данного предела нулю следует из оценки:

$$\left| \frac{\sqrt[5]{\Delta x^6 \Delta y^7}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| < \left| \frac{\sqrt[5]{\Delta x^5 \Delta y^5}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| = \frac{|\Delta x \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{2} \rightarrow 0$$

при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$. Здесь в последнем переходе использовано неравенство $\frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$. Следовательно, функция дифференцируема в данной точке.

2-й способ. Покажем, что частные производные 1-го порядка непрерывны в точке $(0, 0)$. Этого достаточно для дифференцируемости функции в этой точке. Вычислив частные производные $f'_x(x, y) = \frac{6}{5} \sqrt[5]{x y^7}$, $f'_y(x, y) = \frac{7}{5} \sqrt[5]{x^6 y^2}$, убеждаемся в этом. $\square$

4.7 Теоремы о свойствах дифференцируемых функций

Рассмотрим важнейшие теоремы в связи с дифференцируемостью функций.

1. Дифференцируемость и непрерывность.

Теорема 1 (о связи между непрерывностью и дифференцируемостью функции в точке). Если функция дифференцируема в некоторой точке, то

она непрерывна в этой точке. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.¹

Следствие. Разрывная в точке функция не может быть дифференцируема в этой точке.

Пример 93. Функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ непрерывна в точке $(0, 0)$, но не только не дифференцируема в этой точке, но даже не имеет в ней частных производных. Действительно, найдём частную производную по x :

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 0^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x},$$

однако этот предел не существует. Аналогично со второй частной производной. $\square$

2. Дифференцируемость и существование частных производных. Выясним, как связана дифференцируемость с наличием в точке всех частных производных. Для функции одной переменной $y = f(x)$ существования конечной производной $f'(x_0)$, как мы помним, было достаточно для дифференцируемости в точке x_0 , т. е. представления приращения функции в точке x_0 в виде

$$\Delta y(x_0) = dy(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Более того, это эквивалентные утверждения: из существования конечной производной следует дифференцируемость (существование дифференциала), и наоборот.

Для функций нескольких переменных дело обстоит иначе: существование всех частных производных в точке M_0 необходимо, но не достаточно для дифференцируемости функции в данной точке: функция может иметь в точке частные производные по всем переменным, но при этом не быть в ней дифференцируемой.

Теорема 2 (*существование всех частных производных как необходимое условие дифференцируемости функции в точке*). Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она имеет в этой точке конечные частные производные по всем переменным.

В следующем примере будет показано, что наличие в некоторой точке у функции конечных частных производных по всем переменным ещё не гарантирует её дифференцируемости.

Пример 94. Показать, что функция

$$f(x, y) = x + y + \sqrt{|xy|}$$

имеет в точке $(0, 0)$ обе частные производные, но при этом не дифференцируема в этой точке.

¹Иными словами, непрерывность функции является *необходимым условием* для её дифференцируемости.

Решение. В самом деле, найдём частные производные:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y - 0}{\Delta y} = 1.$$

Функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$ тогда и только тогда, когда существует и равен нулю следующий предел:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot \Delta x - f'_y(0, 0) \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x + \Delta y + \sqrt{|\Delta x \Delta y|} - \Delta x - \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}. \end{aligned}$$

Но если положить $\Delta y = \Delta x$, то этот предел равен $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$. Следовательно, функция не дифференцируема в точке $(0, 0)$. $\square$

3. Для того чтобы функция была дифференцируема в точке, она должна удовлетворять более жёстким условиям, чем просто существование конечных частных производных.

Теорема 3 (*непрерывность частных производных как достаточное условие дифференцируемости функции в точке*). Если функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет частные производные 1-го порядка по всем аргументам в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, причём все эти частные производные непрерывны в самой точке M_0 , то указанная функция дифференцируема в точке M_0 .

Пример 95. Функция $z = x^4 e^{xy}$ дифференцируема в любой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, так как её частные производные $z'_x = (x^4 y + 4x^3) e^{xy}$ и $z'_y = x^5 e^{xy}$ всюду непрерывны. $\square$

Замечание. Непрерывность частных производных в точке не является необходимым условием дифференцируемости функции в этой точке. Существуют функции, дифференцируемые в точке, но имеющие разрывные и даже неограниченные в любой окрестности этой точки производные по любому направлению.¹

Пример 96. Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

¹Понятие производной в произвольном направлении будет введено на следующем семинаре.

дифференцируема в точке $(0, 0)$, так как

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot \Delta x - f'_y(0, 0) \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \\ & = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} - 0 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0, \end{aligned}$$

но при этом в окрестности $x^2 + y^2 > 0$ частная производная

$$f'_x(x, y) = 2x \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

не имеет предела при $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ и, следовательно, не является непрерывной функцией в точке $(0, 0)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что $f'_x(x, 0)$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$. $\square$

4. Следующая теорема даёт ещё одно представление функции в окрестности точки дифференцируемости.

Теорема 4 (*необходимое и достаточное условие дифференцируемости в точке*). Функция $u = f(x_1, \dots, x_m) = f(M)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$ в том и только том случае, когда в некоторой окрестности точки M_0 функция $f(M)$ может быть представлена в виде:

$$f(M) = f(M_0) + \sum_{i=1}^m f_i(M)(x_i - x_i^\circ),$$

где функции $f_i(M)$ непрерывны в точке M_0 .

5. Приведём обобщение на случай функции многих переменных одной из наиболее известных теорем о свойствах дифференцируемых функций – теоремы Лагранжа.

Теорема 5 (*теорема Лагранжа, или формула конечных приращений*). Если функция f дифференцируема на множестве $D \subset \mathbb{R}^m$, то для любой точки $(x_1, \dots, x_m) \in D$ и для любых $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ таких, что точка $(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) \in D$, найдётся число $\theta \in (0, 1)$ такое, что выполняется тождество

$$\begin{aligned} & f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m) = \\ & = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(x_1 + \theta \Delta x_1, \dots, x_m + \theta \Delta x_m)}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i. \end{aligned}$$

Замечание. Позже, когда будет введён оператор набла, формулу Лагранжа можно будет записать в $\mathbb{R}^m$ в узнаваемой компактной и гораздо более ясной векторной форме: $f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$, где $\vec{c} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$, $0 < t < 1$.

4.8 Задачи для самостоятельного решения

Задачи на вычисление частных производных и первого дифференциала:

№179. Студенту необходимо найти частную производную $f'_x(0, 0, 1)$ функции $f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$. Он, применяя правила дифференцирования, вычисляет её:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (\sqrt[3]{xyz})'_x = \frac{yz}{3\sqrt[3]{(xyz)^2}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{yz}{x^2}},$$

откуда делает вывод, что искомая частная производная в точке $(0, 0, 1)$ не существует. Прав ли студент?

№180. Найти частные производные первого порядка функции

$$u = x^4 + y^3 - 5x^2y^3.$$

№181. [3, № 3064] Найти частные производные первого порядка функции

$$u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}.$$

№182. [8, № 3212] Найти $f'_x(x, 1)$, если

$$f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

№183. Найти частные производные и полный дифференциал 1-го порядка в точке $(1, 0)$ функции

$$z(x, y) = 5x^2y - 2^{xy}.$$

№184. Найти частные производные 1-го порядка функции

$$z(x, y) = (\sin x)^{\cos y}.$$

№185. Найти частные производные и полный дифференциал 1-го порядка функции

$$f(x, y) = x \cdot \sin(x + 2y).$$

№186. Найти частные производные и полный дифференциал 1-го порядка функции

$$f(x, y) = \operatorname{ch}(x^2y + \operatorname{sh} y).$$

№187. Найти частные производные и полный дифференциал 1-го порядка функции

$$u = x^y + y^z + z^x \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

№188. Найти частные производные и полный дифференциал 1-го порядка функции

$$f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}.$$

№189. [12, с. 32] Найти частные производные первого порядка функции

$$f(x, y) = \int_x^y \frac{\sin t}{t} dt.$$

№190. [12, с. 33] Дифференцируема ли функция $f(x, y) = \int_{x^2-y}^y e^{-t^2} dt$ в точке $(-1, 1)$? Ответ обосновать. Найти первый дифференциал функции в указанной точке.

№191. [8, № 3239] Найти дифференциал 1-го порядка от функции $z = e^{xy}$.

№192. Найти $dz(x, y)$ и $dz(1, 0)$, если $z(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$.

№193. В любой ли точке (x, y, z) существует первый дифференциал функции $u = \sin(xyz)$? Если да, то найти этот дифференциал.

№194. [8, № 3219] Найти частные производные первого порядка функции

$$u = \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{y} \right).$$

№195. [8, № 3241] Найти дифференциал 1-го порядка от функции

$$u = \frac{z}{x^2 + y^2}.$$

№196. Найти первый дифференциал в точке $(0, 0)$ функции

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

№197. Найти в точке $(1, 0)$ дифференциал функции

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 2x^2y + 1.$$

№198. Найти в точке $(0, 0, 0)$ дифференциал функции

$$f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 - y^3 + z^3}.$$

№199. Проверить, что выражение

$$(2x + y)dx + (x - 2y + 1)dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции $z = z(x, y)$. Найти эту функцию при дополнительном условии $z(0, 0) = 1$.

№200. Катеты прямоугольного треугольника, измеренные с точностью до 0,1 см, оказались равными 7,5 см и 18 см. Определить абсолютную погрешность при вычислении гипотенузы.

№201. Вычислить приближённо $\sqrt[3]{0,98 \cdot \sqrt[4]{1,05^3}}$.

Задачи на использование частных производных и их свойства:

№202. Пусть $z = x^y$. Проверить справедливость равенства

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

№203. Показать, что функция $z = y \ln(x^2 - y^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

№204. Показать, что функция $z = y^2 \sin(x^2 - y^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

№205. Найти якобиан перехода от декартовых координат к полярным

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}, \text{ если } x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi.$$

Когда якобиан преобразования отличен от нуля?

№206. Найти якобиан перехода от декартовых координат (x, y, z) к цилиндрическим (r, φ, z) : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Когда якобиан преобразования отличен от нуля?

№207. Найти якобиан перехода от декартовых координат (x, y, z) к сферическим (r, φ, θ) : $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$. Когда якобиан преобразования отличен от нуля?

№208. Привести пример функции $f(x, y)$, имеющей в точке $(0, 0)$ обе частные производные, но при этом разрывной в этой точке. Рассмотреть пример

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

№209. [10, с. 27] Показать, что функция имеет в точке $(0, 0)$ обе частные производные, но при этом разрывна в этой точке:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}, & \text{если } (x, y) \neq 0; \\ 0, & \text{если } (x, y) = 0. \end{cases}$$

№210. Можно ли утверждать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{на осях координат,} \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

разрывна в точке $(0, 0)$, хотя имеет в этой точке обе частные производные?

Задачи, связанные с исследованием функций на дифференцируемость:

№211. Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$. Доказать, что функция $g(y, x) = f(x, y)$ также дифференцируема в точке $(0, 0)$.

№212. Привести пример непрерывной функции $f(x, y)$, которая имеет в точке $(0, 0)$ обе частные производные, но при этом не дифференцируема в этой точке.

№213. [8, № 3212.1] Дана функция $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. Найти $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$. Является ли эта функция дифференцируемой в точке $(0, 0)$? Если да, то найти первый дифференциал $df(0, 0)$.

№214. [8, № 3251] Показать, что функция $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $(0, 0)$, имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$, однако не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Выяснить ограниченность производных $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в окрестности точки $(0, 0)$.

№215. [8, № 3252] Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

в окрестности точки $(0, 0)$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, однако эта функция не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

№216. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x - y, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

№217. [8, № 3253] Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

имеет в окрестности точки $(0, 0)$ частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, которые разрывны в точке $(0, 0)$ и неограничены в любой её окрестности; тем не менее, эта функция дифференцируема в точке $(0, 0)$.

№218. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \cos \frac{\pi}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

дифференцируема в точке $(0, 0)$, но её частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ неограничены в любой её окрестности.

№219. Выяснить, являются ли частные производные f'_x , f'_y функции

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{на осях координат,} \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

непрерывными в точке $(0, 0)$?

№220. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}.$$

№221. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 y^2}.$$

№222. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \sqrt[3]{3x^3 - y^3}.$$

№223. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + 2y^3}.$$

№224. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^4}.$$

№225. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = x\sqrt{1 + y^{\frac{2}{3}}}.$$

№226. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = 2x + \sqrt[3]{x^3 - 8y^3}.$$

№227. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = 3x + 2y + 2\sqrt[3]{xy^2}.$$

№228. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = 1 + 2x + y - 3\sqrt{|xy|}.$$

№229. Исследовать на непрерывность и дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = 1 - 10x + 4y - \sqrt[3]{x^2 y^2}.$$

№230. [8, № 3212.3] Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

№231. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = e^{\sqrt[3]{xy^2}}.$$

№232. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \sqrt[5]{x^4} \cdot (\cos \sqrt[5]{y} - 1).$$

№233. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \arcsin \left(xy + \sqrt[3]{x^3 + y^3} \right).$$

№234. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{x^4 + y^4}{1 + x^2 + y^2}} \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

№235. Исследовать на дифференцируемость функцию

$$f(x, y) = \sqrt{\ln(\cos(x^2 + y^2))}.$$

№236. Исследовать на дифференцируемость функцию

$$f(x, y) = \arcsin \left(2^{x^4 + y^2} \right).$$

№237. Исследовать на непрерывность и дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

№238. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

№239. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3 - y^3}{x^2 + 5y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

№240. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{(x^4 + y^2)^3} \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

№241. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ в зависимости от параметра a функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} |y|^a \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2} + 2x, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

№242. Найти все значения параметра a , при которых функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$, если

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^{3a} + |y|^{7-a}}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

№243. Найти все значения параметра a , при которых функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$, если

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^a \cdot |y|^{5-2a}}{|x| + |y|}, & |x| + |y| > 0; \\ 0, & |x| + |y| = 0. \end{cases}$$

№244. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0, 0)$ функцию

$$f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 - y^3 + z^3}.$$

№245. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0, 0)$ функцию

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 z - xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, & x^2 + y^2 + z^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 + z^2 = 0. \end{cases}$$

№246. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0, 0)$ функцию

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz - 2x^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}, & x^2 + y^2 + z^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 + z^2 = 0. \end{cases}$$

№247. Существует ли в точке $(0, 0, 0)$ касательная плоскость к поверхности

$$z = x + y + \sqrt{|xy|}?$$

4.9 Ответы и решения

179. Студент не прав, поскольку ту формулу, которой он воспользовался, нельзя использовать для вычисления производной в точке $(0, 0, 1)$. Надо было поступить иначе, вычислив указанную частную производную по определению как предел

$$f'_x(0, 0, 1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0, 1) - f(0, 0, 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot 0 \cdot 1} - 0}{\Delta x} = 0.$$

Вообще, в тех точках, где вычисление частной производной по обычным правилам дифференцирования невозможно, производные вычисляются по определению.

180. Имеем: $u'_x(x, y) = 4x^3 - 10xy^3$, $u'_y(x, y) = 3y^2 - 15x^2y^2$.

181. $\frac{\partial u}{\partial x} = (3x^2 + y^2 + z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2xz e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

182. Задачу можно решить двумя способами.

1-й способ. Вычислим производную $f'_x(x, y)$ в произвольной точке (x, y) из окрестности $(x, 1)$ ($x > 0$):

$$f'_x(x, y) = 1 + (y - 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

тогда, подставляя в это выражение $y = 1$ (переходя к пределу при $y \rightarrow 1$), получим $f'_x(x, 1) = 1$. Подчеркнём, что этот способ учитывает непрерывность по переменной y в точке $y = 1$ (в общем случае, не убедившись предварительно в непрерывности по y , так делать нельзя).

2-й способ. Это предпочтительный способ. Найдём производную по x в точке $(x, 1)$ по определению:

$$\begin{aligned} f'_x(x, 1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, 1) - f(x, 1)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x + (1 - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x + \Delta x}{1}} - x - (1 - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{1}}}{\Delta x} = 1. \end{aligned}$$

Фактически, в функции фиксируется $y = 1$, и полученная функция одной переменной x дифференцируется на ОДЗ.

183. Имеем

$$\begin{aligned} z &= 5x^2y - 2^{xy} \Rightarrow \\ dz &= (10xy - y \cdot 2^{xy} \cdot \ln 2)dx + (5x^2 - x \cdot 2^{xy} \cdot \ln 2)dy \Big|_{(1,0)} = (5 - \ln 2)dy. \end{aligned}$$

184. Имеем ОДЗ: $\sin x > 0$. $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y \cdot (\sin x)^{\cos y - 1} \cdot \cos x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = (\sin x)^{\cos y} \ln(\sin x)(-\sin y)$.

185. $f'_x = \sin(x + 2y) + x \cdot \cos(x + 2y)$, $f'_y = 2x \cdot \cos(x + 2y)$, тогда $df = (\sin(x + 2y) + x \cdot \cos(x + 2y))dx + 2x \cdot \cos(x + 2y)dy$.

186. $f'_x = \operatorname{sh}(x^2y + \operatorname{sh} y) \cdot 2xy$, $f'_y = (x^2 + \operatorname{ch} y) \operatorname{sh}(x^2y + \operatorname{sh} y)$, $df = 2xy \operatorname{sh}(x^2y + \operatorname{sh} y)dx + (x^2 + \operatorname{ch} y) \operatorname{sh}(x^2y + \operatorname{sh} y)dy = \operatorname{sh}(x^2y + \operatorname{sh} y)(2xydx + (x^2 + \operatorname{ch} y)dy)$.

187. Имеем $u'_x = yx^{y-1} + z^x \ln z$, $u'_y = x^y \ln x + zy^{z-1}$, $u'_z = y^z \ln y + xz^{x-1}$.

188. При $x > 0$, $z \neq 0$ имеем: $f'_x = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}$, $f'_y = x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x \cdot \frac{1}{z}$, $f'_z = x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)$, тогда $df(x, y, z) = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$.

189. Имеем

$$f'_x(x, y) = \left(\int_x^y \frac{\sin t}{t} dt \right)'_x = -\frac{\sin x}{x}, \quad f'_y(x, y) = \left(\int_x^y \frac{\sin t}{t} dt \right)'_y = \frac{\sin y}{y}.$$

190. Подынтегральная функция непрерывна, поэтому данный интеграл существует, имеется первообразная $F(t)$ (хотя она и не выражается через элементарные функции у интеграла Эйлера–Пуассона). Вычислим частные производные первого порядка:

$$f'_x(x, y) = \left(\int_{x^2-y}^y e^{-t^2} dt \right)'_x = (F(y) - F(x^2 - y))'_x = -2xe^{-(x^2-y)^2};$$

$$f'_y(x, y) = \left(\int_{x^2-y}^y e^{-t^2} dt \right)'_y = (F(y) - F(x^2 - y))'_y = e^{-y^2} + e^{-(x^2-y)^2}.$$

Поскольку обе частные производные непрерывны в точке $(-1, 1)$, то функция дифференцируема в этой точке. Найдём первый дифференциал:

$$\begin{aligned} df(x, y) &= f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = -2xe^{-(x^2-y)^2}dx + \left(e^{-y^2} + e^{-(x^2-y)^2} \right) dy \Big|_{(-1,1)} = \\ &= 2dx + (e^{-1} + 1)dy. \end{aligned}$$

$$\mathbf{191.} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = ye^{xy} dx + xe^{xy} dy = e^{xy}(ydx + xdy).$$

$$\mathbf{192.} \quad \text{Ответ: } dz(x, y) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, \text{ где } x \neq y, x^2 + y^2 \neq 0, \text{ а } dz(1, 0) = dy.$$

193. Найдя все три частных производные, убеждаемся, что они непрерывны в любой точке (x, y, z) , поэтому функция всюду дифференцируема. Найдём её дифференциал 1-го порядка: $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = yz \cos(xyz)dx + xz \cos(xyz)dy + xy \cos(xyz)dz = \cos(xyz)(yzdx + xzdy + xydz)$.

194. При $y \neq 0$, $\frac{x^2}{y} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y} \cdot \sec^2\left(\frac{x^2}{y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \cdot \sec^2\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

195. Имеем:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \frac{(x^2 + y^2)dz - 2z(xdx + ydy)}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ где } x^2 + y^2 \neq 0.$$

196. Дифференциал в точке $(0, 0)$ существует тогда и только тогда, когда функция дифференцируема в этой точке. Исследовав функцию на дифференцируемость (см. задачу ниже), убеждаемся, что дифференциал существует. Так как $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$, то дифференциал равен нулю:

$$df(0, 0) = f'_x(0, 0)dx + f'_y(0, 0)dy = 0.$$

197. Так как $f'_x(x, y) = (3x^2 + 4xy)\Big|_{(1,0)} = 3$, $f'_y(x, y) = (3y^2 + 2x^2)\Big|_{(1,0)} = 2$, то $df(1, 0) = 3dx + 2dy$.

198. Дифференциал в точке $(0, 0, 0)$ существует тогда и только тогда, когда функция дифференцируема в этой точке. Исследовав функцию на дифференцируемость (это исследование выполнено в одной из задач в списке задач к данному семинару), убеждаемся, что функция не дифференцируема в этой точке, а значит, дифференциал не существует.

199. Данное выражение является полным дифференциалом некоторой функции z тогда и только тогда, когда выполняется система уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 2x + y, \\ z'_y = x - 2y + 1. \end{cases}$$

Интегрируя по x первое из уравнений, получаем, что $z = x^2 + xy + C_1(y)$, а интегрируя по y второе из уравнений, получаем $z = xy - y^2 + y + C_2(x)$. Но равенство $x^2 + xy + C_1(y) \equiv xy - y^2 + y + C_2(x)$ выполняется при всех x и y , только если $C_2(x) = x^2 + C_3$, а $C_1(y) = -y^2 + y + C_4$. Но тогда функция должна иметь вид $z = x^2 + xy - y^2 + y + C$, где C – некоторая константа. Чтобы найти значение C , воспользуемся дополнительным условием: $z(0, 0) = C = 1$. Итак, функция найдена, это $z = x^2 + xy - y^2 + y + 1$.

Приведём теорему (необходимое и достаточное условие полного дифференциала), которая будет доказана в курсе позже: «Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $f(x, y)$ в области D тогда и только тогда, когда в этой области выполняется

равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. При этом предполагается, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в этой области непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка».

200. Пусть x и y – катеты, тогда гипотенуза $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. В задаче предполагается найти Δz . Поскольку

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y,$$

то имеем:

$$\Delta z \approx \frac{x\Delta x + y\Delta y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(7,5 + 18) \cdot 0,1}{\sqrt{7,5^2 + 18^2}} = \frac{5,1}{3,9} = 0,13.$$

Замечание. При вычислении абсолютной погрешности величины z как функции переменных $x_1, \dots, x_m$, измеренных с абсолютными погрешностями $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, применяют формулу

$$\Delta z = \left| \frac{\partial z}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \dots + \left| \frac{\partial z}{\partial x_m} \right| \Delta x_m.$$

201. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{y^3}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{4}}$. Искомое число представляет собой значение этой функции в точке $M(0,98; 1,05)$. Пусть $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $x_0 + \Delta x = 0,98$, $y_0 + \Delta y = 1,05$. Так как частные производные рассматриваемой функции $f'_x(x, y) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{4}}$, $f'_y(x, y) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{3}{4}}$ в точке $M_0(1, 1)$ непрерывны, то функция дифференцируема в точке M_0 и для вычисления её значения в точке M мы можем воспользоваться формулой

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y,$$

или

$$\begin{aligned} f(0,98; 1,05) &\approx f(1, 1) + f'_x(1, 1) \cdot \Delta x + f'_y(1, 1) \cdot \Delta y = \\ &= 1 + \frac{1}{3} \cdot (-0,02) + \frac{1}{4} \cdot 0,05 = 1,006. \end{aligned}$$

202. ОДЗ: $x > 0$. Найдём частные производные и подставим в левую часть дифференциального уравнения:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} \cdot yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x} \cdot x^y \ln x = 2x^y = 2z.$$

Значит, равенство верно, и функция z является решением данного дифференциального уравнения.

203. При условии $x^2 > y^2$ находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2xy}{x^2 - y^2} \right) + \frac{1}{y} \cdot \left(\ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2} \right) = \frac{z}{y^2}.$$

Несложно убедиться в справедливости этого тождества.

204. Найдём частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos(x^2 - y^2) \cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \sin(x^2 - y^2) + y^2 \cos(x^2 - y^2) \cdot (-2y).$$

Подставим их в левую часть уравнения и упростим её:

$$\begin{aligned} y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= y^2 \cdot (y^2 \cos(x^2 - y^2) \cdot 2x) + \\ &+ xy \cdot (2y \sin(x^2 - y^2) + y^2 \cos(x^2 - y^2) \cdot (-2y)) = 2xy^2 \sin(x^2 - y^2) = 2xz. \end{aligned}$$

205. Найдя частные производные, подставим в определитель:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Якобиан преобразования r (применяется при вычислении двойных интегралов) отличен от нуля всюду, где $r > 0$, т. е. за исключением начала координат, в котором $r = 0$. Заметим, что элемент площади при переходе от декартовых к полярным координатам будет выглядеть следующим образом: $dS = dx dy = J(r, \varphi) dr d\varphi = r dr d\varphi$.

206. Найдём матрицу Якоби:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда якобиан преобразования равен $\det \left(\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} \right) = r$ (применяется при вычислении тройных интегралов). Якобиан отличен от нуля всюду, где $r > 0$, т. е. за исключением оси Oz , где $r = 0$.

207. Найдём матрицу Якоби:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Тогда якобиан преобразования равен $\det \left(\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} \right) = -r^2 \sin \theta$ (применяется при вычислении тройных интегралов). При $r > 0$, $\theta \neq 0$ и $\theta \neq \pi$ якобиан отличен от нуля. Таким образом, для элемента объёма имеем: $dV = dx dy dz = J(r, \varphi, \theta) \cdot dr d\varphi d\theta = -r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$.

208. Действительно, эта функция не является непрерывной в точке $(0, 0)$ (достаточно рассмотреть непрерывность вдоль прямых $y = kx$, $k \neq 0$), однако в этой точке функция имеет обе частные производные:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

209. Частные производные в точке $(0, 0)$ существуют:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0,$$

но при этом функция терпит разрыв в этой точке, т. к. при $y = x$ предел равен $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2} \neq 0$.

210. Да. Действительно, найдём частные производные, используя их определения:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Разрывность функции в точке $(0, 0)$ следует из того, что предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не существует (объясните это).

211. Проверим выполнение условия дифференцируемости $g(y, x)$ в точке $(0, 0)$. Найдём частные производные в точке $(0, 0)$ функции $g(y, x)$:

$$g'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(y, 0) - g(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = f'_y(0, 0),$$

$$g'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(0, x) - g(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = f'_x(0, 0).$$

Условие дифференцируемости $g(y, x)$ в точке $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{g(y, x) - g(0, 0) - g'_y(0, 0) \cdot y - g'_x(0, 0) \cdot x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_y(0, 0) \cdot y - f'_x(0, 0) \cdot x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$, то второй из пределов равен нулю, но тогда первый предел также равен нулю. А это означает дифференцируемость функции $g(y, x)$ в точке $(0, 0)$.

212. Один из примеров рассмотрен в тексте пособия: $f(x, y) = x + y + \sqrt{|xy|}$. Придумайте свой пример.

213. Найдём частные производные:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot \Delta y} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Выясним теперь, существует ли у функции в данной точке первый дифференциал. Для этого исследуем её на дифференцируемость в указанной точке. По определению, функция является дифференцируемой в точке $(0, 0)$ тогда и только тогда, когда равен нулю следующий предел:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot \Delta x - f'_y(0, 0) \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Покажем, что это не так. В самом деле, если взять $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$), то получим $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2}} = +\infty$, т. е. предел не равен нулю, а следовательно, функция не дифференцируема и дифференциал $df(0, 0)$ не существует.

214. 1) Функция непрерывна в $(0, 0)$, так как

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{|xy|} = 0 = f(0, 0).$$

По определению частных производных

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = 0,$$

аналогично $f'_y(0, 0) = 0$.

2) Исследуем на дифференцируемость:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot \Delta x - f'_y(0, 0) \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \\ & = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \left| \text{при } \Delta y = \Delta x \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\sqrt{2}|\Delta x|} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Так как предел не равен нулю, то функция не дифференцируема в $(0, 0)$.

3) Вычислим частные производные в окрестности точки $(0, 0)$. При $x > 0$ имеем $f'_x(x, y) = (\sqrt{x|y|})'_x = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{y}{x}\right|}$, а при $x < 0$ получим $f'_x(x, y) = (\sqrt{-x|y|})'_x = -\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{y}{x}\right|}$. Итак, $f'_x(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{y}{x}\right|} \cdot \operatorname{sgn} x$. В частности, при $x = \frac{1}{n^2}$, $y = \frac{1}{n}$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_x\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{2} = +\infty.$$

Отсюда следует, что производная $f'_x(x, y)$ не ограничена в окрестности точки $(0, 0)$. Это верно и для производной $f'_y(x, y)$.

215. 1) Исследуем функцию на непрерывность. При $x^2 + y^2 > 0$ в силу неравенства $\frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$ получим $\sqrt{\frac{|xy|}{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $\frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{|xy|}}{2}$, что означает

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

2) Покажем ограниченность частных производных в окрестности точки $(0, 0)$. При $x^2 + y^2 > 0$ имеем

$$f'_x(x, y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^3, \quad f'_y(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^3.$$

Ограниченность производных следует из оценок

$$|f'_x(x, y)| = \left|\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^3\right| = \left(\frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^3 \leq 1^3 = 1$$

(аналогично для $f'_y(x, y)$).

3) Наконец, покажем, что функция не дифференцируема в точке $(0, 0)$. Найдём частные производные

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

аналогично $f'_y(0, 0) = 0$ и покажем, что условие дифференцируемости не выполняется (следующий предел не равен 0):

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot \Delta x - f'_y(0, 0) \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \left| \text{при } \Delta y = \Delta x \right| = \frac{1}{2} \neq 0,$$

а значит, функция не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

216. Найдём частные производные

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = -1.$$

Покажем, что условие дифференцируемости не выполняется (следующий предел не равен 0):

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot \Delta x - f'_y(0, 0) \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + \Delta x - \Delta y - \Delta x + \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам $\Delta x = r \cos \varphi$, $\Delta y = r \sin \varphi$, получим

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi}{r^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} (\cos \varphi \cdot \sin \varphi).$$

Так как данный предел зависит от φ , то функция не дифференцируема в заданной точке.

217. 1) Если $x^2 + y^2 \neq 0$ (в окрестности точки), то частные производные находим по правилам дифференцирования:

$$f'_x(x, y) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y(x, y) = 2y \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Если же $x = y = 0$, то производные находим по определению:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 \sin \frac{1}{y^2}}{y} = 0.$$

То есть частные производные существуют как в окрестности точки $(0, 0)$, так и в самой точке.

2) Покажем, что $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ разрывны в точке $(0, 0)$ и не ограничены в любой её окрестности. Рассмотрим для этого последовательность точек $M_n(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ при $n \rightarrow +\infty$ такую, что $\cos \frac{1}{x^2 + y^2} = 1$, т. е. $\frac{1}{x^2 + y^2} = 2\pi n$.

Например, можно взять $x_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$, $y_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Соответствующая последовательность значений производной

$$f'_x(x_n, y_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \sin 2\pi n - 2\sqrt{\pi n} = -2\sqrt{\pi n} \rightarrow -\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty,$$

т. е. частная производная $f'_x(x, y)$ разрывна в точке $(0, 0)$ и не ограничена в любой её окрестности. Аналогично для $f'_y(x, y)$.

3) Покажем, что, тем не менее, функция дифференцируема в точке $(0, 0)$. Так как $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, то условие дифференцируемости принимает вид

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot \Delta x - f'_y(0, 0) \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \cdot \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \cdot \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

что означает дифференцируемость функции в точке $(0, 0)$.

218. 1) Если $x^2 + y^2 \neq 0$ (в окрестности точки), то частные производные находим по правилам дифференцирования:

$$f'_x(x, y) = 2x \cos \frac{\pi}{x^2 + y^2} + \frac{2\pi x}{x^2 + y^2} \cdot \sin \frac{\pi}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y(x, y) = 2y \cos \frac{\pi}{x^2 + y^2} + \frac{2\pi y}{x^2 + y^2} \cdot \sin \frac{\pi}{x^2 + y^2}.$$

Если же $x = y = 0$, то производные находим по определению:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos \frac{\pi}{x^2}}{x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 \cdot \cos \frac{\pi}{y^2}}{y} = 0.$$

То есть частные производные существуют как в окрестности точки $(0, 0)$, так и в самой точке.

2) Покажем, что $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ разрывны в точке $(0, 0)$ и не ограничены в любой её окрестности. Рассмотрим для этого последовательность точек $M_n(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ при $n \rightarrow +\infty$ такую, что $x_n = \frac{1}{\sqrt{1+4n}}$, $y_n = \frac{1}{\sqrt{1+4n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Соответствующая последовательность значений производной

$$\begin{aligned} f'_x(x_n, y_n) &= \frac{2}{\sqrt{1+4n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(1+4n)\right) + \pi\sqrt{1+4n} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(1+4n)\right) \\ &= \pi\sqrt{1+4n} \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

т. е. частная производная $f'_x(x, y)$ разрывна в точке $(0, 0)$ и неограничена в любой её окрестности. Аналогично для $f'_y(x, y)$.

3) Покажем, что, тем не менее, функция дифференцируема в точке $(0, 0)$. Так как $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, то условие дифференцируемости принимает вид

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot \Delta x - f'_y(0, 0) \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \cdot \cos \frac{\pi}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \cdot \cos \frac{\pi}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

что означает дифференцируемость функции в точке $(0, 0)$.

219. По определению, $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$. Во всех точках из окрестности $(0, 0)$, не лежащих на координатных осях, функция постоянна и равна 0, поэтому её частные производные равны 0. Найдём частную производную f'_x в точках $(x, 0)$, лежащих на оси абсцисс и отличных от $(0, 0)$:

$$f'_x(x, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, 0) - f(x, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta x} = 0.$$

Найдём теперь частную производную f'_x в точках $(0, y)$, лежащих на оси ординат и отличных от $(0, 0)$:

$$f'_x(0, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, y) - f(0, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 1}{\Delta x} = \infty.$$

Это означает, что конечная частная производная f'_x существует не во всех точках из окрестности $(0, 0)$. Следовательно, предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_x(x, y)$ не существует,

и частная производная f'_x разрывна в точке $(0, 0)$. Аналогично с f'_y .

220. Найдём частные производные в точке $(0, 0)$:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 \cdot 0} - 0}{x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0^2 \cdot y} - 0}{y} = 0.$$

Решение задачи сводится к проверке равенства нулю предела

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(0,0) - f'_x(0,0) \cdot x - f'_y(0,0) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Рассмотрим последовательность точек $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0,0)$ при $n \rightarrow +\infty$, но

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{(\frac{1}{n})^2 \cdot \frac{1}{n}}}{\sqrt{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Следовательно, функция не дифференцируема в точке $(0,0)$.

221. Ответ: функция не дифференцируема в точке $(0,0)$ (см. решение предыдущей задачи).

222. Данная функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$ тогда и только тогда, когда её полное приращение в этой точке $\Delta f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)$ можно представить в виде: $\Delta f(0,0) = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Найдём частные производные в точке $(0,0)$:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3\Delta x^3 - 0} - 0}{\Delta x} = \sqrt[3]{3},$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0 - \Delta y^3} - 0}{\Delta y} = -1.$$

Решение задачи сводится к проверке равенства нулю предела

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(0,0) - f'_x(0,0) \cdot \Delta x - f'_y(0,0) \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \\ = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{3\Delta x^3 - \Delta y^3} - \sqrt[3]{3}\Delta x + \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}. \end{aligned}$$

Заметим, что если, в частности, положить $\Delta y = \Delta x$, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} + 1)\Delta x}{\sqrt{2}\Delta x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} + 1)\Delta x}{\sqrt{2}|\Delta x|} \neq 0.$$

Следовательно, функция не является дифференцируемой в данной точке.

223. Функция не является дифференцируемой. См. решение предыдущей задачи.

224. Найдём частные производные:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 0^4} - 0}{x} = 1,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0^3 + y^4} - 0}{y} = 0.$$

Согласно условию дифференцируемости, достаточно проверить равенство нулю предела

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^4} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{r^3 \cos^3 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi} - r \cos \varphi}{r} = \\ & = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt[3]{\cos^3 \varphi + r \sin^4 \varphi} - \cos \varphi \right) = 0 \quad \forall \varphi = \varphi(r), \end{aligned}$$

поскольку в силу непрерывности функции кубического корня выражение $\sqrt[3]{\cos^3(\varphi(r)) + r \sin^4(\varphi(r))}$ в окрестности точки $r = 0$ можно представить в виде $\cos(\varphi(r)) + o(1)$, где $o(1)$ – бесконечно малая при $r \rightarrow 0$ функция (даже если предел $\cos \varphi(r)$ при $r \rightarrow 0$ не существует, например, $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ (траектория асимптотически «закручивается» вокруг точки)). Следовательно, функция дифференцируема в точке $(0,0)$.

225. Найдём частные производные:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sqrt{1 + 0^{\frac{2}{3}}} - 0}{x} = 1,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \sqrt{1 + y^{\frac{2}{3}}} - 0}{y} = 0.$$

Согласно условию дифференцируемости, достаточно проверить равенство нулю предела

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x\sqrt{1 + y^{\frac{2}{3}}} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Перейдём к полярным координатам:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi \left(\sqrt{1 + (r \sin \varphi)^{\frac{2}{3}}} - 1 \right)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos \varphi \left(\sqrt{1 + (r \sin \varphi)^{\frac{2}{3}}} - 1 \right) = 0$$

$\forall \varphi = \varphi(r)$, поэтому функция дифференцируема в точке $(0, 0)$.

226. По определению, функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , если её приращение в этой точке $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ можно представить в виде: $\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. В данном случае $\Delta f(0, 0) = 2\Delta x + \sqrt[3]{\Delta x^3 - 8\Delta y^3}$,

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + \sqrt[3]{\Delta x^3 - 0}}{\Delta x} = 3,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-2\Delta y - 0}{\Delta y} = -2.$$

Решение задачи сводится к проверке равенства нулю предела

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot \Delta x - f'_y(0, 0) \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \\ = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{2\Delta x + \sqrt[3]{\Delta x^3 - 8\Delta y^3} - 3\Delta x + 2\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}. \end{aligned}$$

Заметим, что если, в частности, положить $\Delta y = \Delta x$, то получим $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(1 - \sqrt[3]{7})}{\sqrt{2}|\Delta x|} \neq 0$. Следовательно, функция не является дифференцируемой в данной точке.

227. Выпишем полное приращение функции в указанной точке: $\Delta f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = 3\Delta x + 2\Delta y + 2\sqrt[3]{\Delta x \Delta y^2}$ и найдём частные производные:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x - 0}{\Delta x} = 3,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta y - 0}{\Delta y} = 2.$$

Функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) тогда и только тогда, когда существует и равен нулю следующий предел:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x - f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

В данном случае предел имеет вид

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{3\Delta x + 2\Delta y + 2\sqrt[3]{\Delta x \Delta y^2} - 3\Delta x - 2\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{2\sqrt[3]{\Delta x \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Если положить $\Delta y = \Delta x$, то получим $\sqrt{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{|\Delta x|}$. Этот предел не существует. Следовательно, функция не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

228. Выпишем полное приращение функции в указанной точке: $\Delta f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = 2\Delta x + \Delta y - 3\sqrt{|\Delta x \Delta y|}$ и найдём частные производные:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 + 2\Delta x - 1}{\Delta x} = 2,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1 + \Delta y - 1}{\Delta y} = 1.$$

Функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$ тогда и только тогда, когда существует и равен нулю следующий предел:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)\Delta x - f'_y(0, 0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

В данном случае он имеет вид

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{2\Delta x + \Delta y - 3\sqrt{|\Delta x \Delta y|} - 2\Delta x - \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{-3\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Заметим, что если положить $\Delta y = \Delta x$, то этот предел равен $-\frac{3}{\sqrt{2}} \neq 0$. Следовательно, функция не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

229. Найдём частные производные:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 10x - 1}{x} = -10,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + 4y - 1}{y} = 4.$$

Функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$ тогда и только тогда, когда существует и равен нулю следующий предел:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(1 - 10x + 4y - \sqrt[3]{x^2 y^2}) - 1 + 10x - 4y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^2 y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$- \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{\sqrt[3]{r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}}{r} = - \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \sqrt[3]{r \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = 0.$$

Следовательно, функция дифференцируема (а значит, и непрерывна) в точке $(0, 0)$.

230. Функция дифференцируема в точке $(0, 0)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot \Delta x - f'_y(0, 0) \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Найдём полное приращение функции в точке $(0, 0)$

$$\Delta f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = e^{-\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

и частные производные:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} e^{-\frac{1}{\Delta x^2}} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} e^{-\frac{1}{\Delta y^2}} = 0.$$

Тогда условие дифференцируемости принимает вид:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\rho} = 0$$

и очевидно, что оно выполняется. То есть функция дифференцируема в данной точке.

231. Проверим выполнение условия дифференцируемости:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot \Delta x - f'_y(0, 0) \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Так как

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0,$$

то в данном случае оно принимает вид

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{e^{\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y^2}} - 1 - 0 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Покажем, что предел не существует. Перепишем его в виде:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{e^{\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y^2}} - 1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{e^{\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y^2}} - 1}{\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Первая дробь стремится к 1, а вторая при $\Delta x = \Delta y$ даёт $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\sqrt{2}|\Delta x|} \neq 0$.

Функция не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

232. Найдём частные производные в точке $(0, 0)$:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x^4} \cdot (\cos \sqrt[5]{0} - 1)}{x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{0^4} \cdot (\cos \sqrt[5]{y} - 1)}{y} = 0.$$

Проверим выполнение условия дифференцируемости:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[5]{x^4} \cdot (\cos \sqrt[5]{y} - 1)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[5]{x^4} \cdot \left(-2 \sin^2 \frac{\sqrt[5]{y}}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= -2 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[5]{x^4} \cdot \left(\frac{\sqrt[5]{y}}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[5]{x^4 y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$-\frac{1}{2} \cdot \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{\sqrt[5]{r^6 \cdot \cos^4 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \sqrt[5]{r} \cdot \sqrt[5]{\cos^4 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}.$$

Этот предел равен 0, так как $\sqrt[5]{r} \rightarrow 0$, а функция $\sqrt[5]{\cos^4 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}$ является ограниченной. Следовательно, функция дифференцируема в точке $(0, 0)$.

233. Найдём частные производные в точке $(0, 0)$:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x \cdot 0 + \sqrt[3]{x^3 + 0^3})}{x} = 1,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin(0 \cdot y + \sqrt[3]{0^3 + y^3})}{y} = 1.$$

Проверим выполнение условия дифференцируемости:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Имеем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\arcsin(xy + \sqrt[3]{x^3 + y^3}) - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{y=x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x^2 + x\sqrt[3]{2}) - 2x}{|x|\sqrt{2}}.$$

Таку как данный предел не существует, то функция не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

234. С учётом $\operatorname{arctg} t \sim t$ при $t \rightarrow 0$, найдём частные производные в точке $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{x^4}{1+x^2}} \cdot \cos \frac{1}{x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^4}{1+x^2}} \cdot \cos \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^4} \cdot \cos \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \cdot \cos \frac{1}{x^2} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично $f'_y(0, 0) = 0$. Проверим выполнение условия дифференцируемости:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Имеем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{x^4 + y^4}{1 + x^2 + y^2}} \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^4 + y^4}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{\sqrt[3]{r^4(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)}}{r} \cdot \cos \frac{1}{r^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \sqrt[3]{r} \sqrt[3]{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi} \cdot \cos \frac{1}{r^2}.$$

Этот предел равен 0, так как $\sqrt[3]{r} \rightarrow 0$, а функция $\cos \frac{1}{r^2} \cdot \sqrt[3]{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}$ является ограниченной. Следовательно, функция дифференцируема в точке $(0, 0)$.

235. Найдём область определения этой функции: $\ln(\cos(x^2 + y^2)) \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x^2 + y^2) = 1$, т. е. функция определена в точках, принадлежащих семейству концентрических окружностей вида $x^2 + y^2 = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (при $n = 0$ окружность вырождается в точку $(0, 0)$). Какую бы точку на любой из этих окружностей мы ни взяли, функция не будет определена ни в какой сколь угодно малой окрестности этой точки (во всей окрестности!), а значит, функция не будет, строго говоря, не только дифференцируемой, но даже непрерывной в этих точках, поскольку в них не существует двойной предел по всем направлениям.

236. Найдём область определения этой функции: $2^{x^4+y^2} \leq 1$, т. е. функция определена в единственной точке $(0, 0)$ и, очевидно, не является дифференцируемой в этой точке (для дифференцируемости как минимум необходимо, чтобы функция была определена в некоторой окрестности точки).

237. Необходимым условием дифференцируемости функции в точке является существование в этой точке конечных значений всех частных производных. Найдём частные производные:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg \sqrt[3]{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty,$$

что означает, что функция не дифференцируема в данной точке. Тем не менее, функция непрерывна в точке $(0, 0)$, так как

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \arctg \sqrt[3]{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0).$$

238. Проверим выполнение условия дифференцируемости:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Найдём частные производные в точке $(0, 0)$:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3+0^3}{x^2+0^2} - 0}{x} = 1,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{0^3+y^3}{0^2+y^2} - 0}{y} = 1.$$

Тогда условие дифференцируемости примет вид:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{-xy(x+y)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

При $y = x$ получаем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^3}{2x^2\sqrt{2}|x|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$. Но данный предел не существует, поэтому функция не дифференцируема в точке $(0,0)$.

239. Проверим выполнение условия дифференцируемости:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0) \cdot x - f'_y(0,0) \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Найдём частные производные в точке $(0,0)$:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x^3-0^3}{x^2+5 \cdot 0^2} - 0}{x} = 3,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{3 \cdot 0^3 - y^3}{0^2+5y^2} - 0}{y} = -\frac{1}{5}.$$

Тогда условие дифференцируемости примет вид:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{3x^3-y^3}{x^2+5y^2} - 3x + \frac{1}{5}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(\frac{x}{5} - 15y)}{(x^2+5y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

При $y = x$ получаем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-74x}{30\sqrt{2}|x|} = -\frac{37}{15\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$. Но данный предел не существует, поэтому функция не дифференцируема в точке $(0,0)$.

240. Проверим выполнение условия дифференцируемости:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0) \cdot x - f'_y(0,0) \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Найдём частные производные в точке $(0,0)$:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x^4+0^2)^3} \cdot \sin \frac{1}{x^2+0^2}}{x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(0^4 + y^2)^3} \cdot \sin \frac{1}{0^2 + y^2}}{x} = 0.$$

Тогда условие дифференцируемости примет вид:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{(x^4 + y^2)^3} \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Заметим, что

$$\left| \frac{\sqrt{(x^4 + y^2)^3} \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \left| \frac{\sqrt{(x^4 + y^2)^3}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|.$$

Переходя к полярным координатам, покажем равенство нулю предела

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{(x^4 + y^2)^3}}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{\sqrt{((r \cos \varphi)^4 + (r \sin \varphi)^2)^3}}{r} = \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} r^2 \sqrt{(r^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi)^3}, \end{aligned}$$

откуда следует выполнение условия дифференцируемости функции в точке.

241. Заметим, что при $a \leq 0$ не существует конечного предела функции в исследуемой точке, значит, функция не будет непрерывной (а следовательно, и дифференцируемой) в этой точке. Пусть $a > 0$. Проверим выполнение условия дифференцируемости:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0) \cdot x - f'_y(0,0) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \quad (1)$$

Найдём частные производные в точке $(0,0)$:

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|0|^a \cos \frac{1}{x^2 + 0^2} + 2x}{x} = 2, \\ f'_y(0,0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|^a \cos \frac{1}{0^2 + y^2} + 0}{|y| \cdot \operatorname{sgn} y} = 0 \end{aligned}$$

(вторая из частных производных существует лишь при $a > 1$ как предел произведения бесконечной малой функции $|y|^{a-1}$ и ограниченной функции $\cos \frac{1}{y^2}$). Тогда при $a > 1$ оценим модуль выражения под знаком предела в (1):

$$\left| \frac{|y|^a \cos \frac{1}{x^2 + y^2} + 2x - 0 - 2x - 0 \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| =$$

$$= \frac{|y|^a \left| \cos \frac{1}{x^2+y^2} \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|y|^a \left| \cos \frac{1}{x^2+y^2} \right|}{\sqrt{y^2}} \leq \frac{|y|^a}{|y|} = |y|^{a-1} \rightarrow 0$$

при $y \rightarrow 0$. Следовательно, данный предел равен нулю, а значит, функция дифференцируема в точке $(0, 0)$ при $a > 1$.

242. Найдём частные производные в точке $(0, 0)$:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{|x|^{3a} + |0|^{7-a}}{x^2 + 0^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^{3a}}{x^3}.$$

Заметим, что при $7 - a > 0$ и $a > 1$ этот предел существует и равен 0 (в противном случае конечный предел не существует).

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{0^{3a} + |y|^{7-a}}{0^2 + y^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|^{7-a}}{y^3}.$$

При условиях $a > 1$ и $4 - a > 0$ этот предел равен 0 (в противном случае конечный предел не существует). Итак, при $1 < a < 4$ у функции в точке $(0, 0)$ существуют обе частные производные.

Проверим выполнение условия дифференцируемости, найдя те a , при которых следующий предел равен нулю:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|x|^{3a} + |y|^{7-a}}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Перейдём к полярным координатам $|x| = r \cos \varphi$, $|y| = r \sin \varphi$, где $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{r^{3a}(\cos \varphi)^{3a} + r^{7-a}(\sin \varphi)^{7-a}}{r^3} = \\ & = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} (r^{3a-3}(\cos \varphi)^{3a} + r^{4-a}(\sin \varphi)^{7-a}). \end{aligned}$$

Видно, что при $1 < a < 4$ (и только при этих a) этот предел равен 0, т. е. функция дифференцируема в точке. Ответ: при $a \in (1, 4)$.

243. Найдём частные производные в точке $(0, 0)$:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{|x|^a \cdot 0^{5-2a}}{|x| + |0|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{|x|x} = 0$$

при $5 - 2a > 0$ (случай $5 - 2a = 0$ рассмотрим отдельно);

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{0^a \cdot |y|^{5-2a}}{|0| + |y|}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{|y|y} = 0$$

при $a > 0$ (случай $a = 0$ рассмотрим отдельно). Итак, при $0 < a < \frac{5}{2}$ у функции в точке $(0, 0)$ существуют обе частные производные. Выпишем предел из условия дифференцируемости и выясним, при каких $a \in (0, \frac{5}{2})$ он равен 0:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|x|^a \cdot |y|^{5-2a}}{(|x| + |y|)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Переходя в пределе к полярным координатам $|x| = r \cos \varphi$, $|y| = r \sin \varphi$, где $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, получим

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} \frac{r^a (\cos \varphi)^a \cdot r^{5-2a} (\sin \varphi)^{5-2a}}{(\cos \varphi + \sin \varphi) r^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi = \varphi(r)}} r^{3-a} \cdot \frac{(\cos \varphi)^a \cdot (\sin \varphi)^{5-2a}}{\cos \varphi + \sin \varphi}.$$

Числитель дроби ограничен в силу положительности степеней. Покажем, что вся дробь ограничена, и тогда данный предел будет равен 0, а функция – дифференцируема в данной точке. В самом деле, $\cos \varphi + \sin \varphi = \sqrt{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$. Так как $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{4} \leq \varphi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$, $1 \leq \sqrt{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})} \leq 1$, что и доказывает ограниченность дроби под знаком предела. Итак, функция дифференцируема при $a \in (0, \frac{5}{2})$. Докажите самостоятельно дифференцируемость функции в точке $(0, 0)$ при $a = 0$ и $a = \frac{5}{2}$. Ответ: при $a \in [0, \frac{5}{2}]$.

244. По определению, функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0) , если её приращение в этой точке

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

можно представить в виде:

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \Delta z + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. В данном случае $\Delta f(0, 0, 0) = \sqrt[3]{\Delta x^3 - \Delta y^3 + \Delta z^3}$,

$$f'_x(0, 0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 0 + 0} - 0}{x} = 1,$$

$$f'_y(0, 0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y, 0) - f(0, 0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0 - y^3 + 0} - 0}{y} = -1,$$

$$f'_z(0, 0, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(0, 0, z) - f(0, 0, 0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0 - 0 + z^3} - 0}{z} = 1.$$

Решение задачи сводится к проверке равенства нулю предела

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(0, 0, 0) - f'_x(0, 0, 0) \Delta x - f'_y(0, 0, 0) \Delta y - f'_z(0, 0, 0) \Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3 - \Delta y^3 + \Delta z^3} - \Delta x + \Delta y - \Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}.$$

Заметим, что если, в частности, положить $\Delta x = -\Delta y = \Delta z$, то получим $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(\sqrt[3]{3} - 3)}{\sqrt[3]{3}|\Delta x|} \neq 0$. Следовательно, функция не является дифференцируемой в данной точке.

245. По определению, функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $(0, 0, 0)$, если её приращение в этой точке

$$\Delta f(0, 0, 0) = f(\Delta x, \Delta y, \Delta z) - f(0, 0, 0)$$

можно представить в виде:

$$\Delta f(0, 0, 0) = f'_x(0, 0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0, 0)\Delta y + f'_z(0, 0, 0)\Delta z + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. В данном случае $\Delta f(0, 0, 0) = \frac{\Delta x^2 \Delta z - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$,

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x^2} = 0, \\ f'_y(0, 0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y, 0) - f(0, 0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y^2} = 0, \\ f'_z(0, 0, 0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(0, 0, \Delta z) - f(0, 0, 0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta z^2} = 0. \end{aligned}$$

Решение задачи сводится к проверке равенства нулю предела

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(0, 0, 0) - f'_x(0, 0, 0)\Delta x - f'_y(0, 0, 0)\Delta y - f'_z(0, 0, 0)\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} &= \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\frac{\Delta x^2 \Delta z - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\Delta x^2 \Delta z - \Delta x \Delta y \Delta z}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

В частности, если положить $\Delta x = -\Delta y = -\Delta z$, то получим $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\Delta x^3}{3^{\frac{3}{2}}|\Delta x|^3}$ – не существует. Следовательно, функция не является дифференцируемой в данной точке.

246. Ответ: функция не является дифференцируемой в данной точке. См. решение предыдущей задачи.

247. Так как функция $z(x, y)$ не дифференцируема в точке $(0, 0)$ (см. пример в тексте параграфа), то касательная плоскость в точке $(0, 0, 0)$ не существует.

5 СЕМИНАР: n -кратная дифференцируемость. Дифференцирование сложной функции.

«Математика – это доказательство самых очевидных вещей
наименее очевидным способом».

Дьёрдь По́я (1887–1985) – венгерский, швейцарский и
американский математик, популяризатор науки.

С целью защиты авторских прав
НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

5.1 Частные производные высших порядков. Понятие n -кратной дифференцируемости

Перейдём к изучению функций многих переменных, дифференцируемых в заданной точке n раз ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

Частные производные высших порядков. Пусть частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ по аргументу x_i функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$, определённой в области D , существует в каждой точке этой области. В этом случае частная производная представляет собой функцию переменных $x_1, \dots, x_m$, также определённую в области D . Может случиться, что эта функция имеет частную производную по аргументу x_k в некоторой точке M области D . Тогда эту частную производную по переменной x_k называют *второй частной производной*, или *частной производной второго порядка* функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в точке M (сначала по аргументу x_i , а затем по аргументу x_k) и обозначают одним из следующих символов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, \quad u''_{x_i x_k}, \quad f^{(2)}_{x_i x_k}.$$

При этом если $i \neq k$, то частная производная

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

называется *смешанной частной производной* второго порядка.¹ Аналогично вводится понятие частной производной n -го порядка при любом натуральном $n > 2$.

¹Используются обозначения, принятые в трудах Г. М. Фихтенгольца, популярных задачниках Г. Н. Бёрмана и Б. П. Демидовича.

Пример 97. Сколько всего частных производных может иметь функция? Для функции двух переменных $u = f(x, y)$ – две частных производных 1-го порядка $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и четыре производных 2-го порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, две последние из которых являются смешанными частными производными. С ростом порядка количество частных производных естественным образом увеличивается. $\square$

Если уже введено понятие $(n - 1)$ -й частной производной функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ по аргументам $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-1}}$, и эта частная производная имеет в точке M_0 частную производную по аргументу x_{i_n} , то указанную частную производную называют *n -й частной производной* (частной производной n -го порядка) функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в точке M_0 по аргументам $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$. При этом если не все индексы $i_1, i_2, \dots, i_n$ совпадают между собой, то частная производная

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{n-1}} \partial x_{i_n}} = \frac{\partial u}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{n-1}}} \right)$$

называется *смешанной* частной производной n -го порядка.

Частная производная любого порядка по аргументу x_i определяется как обыкновенная производная функции одной переменной x_i при фиксированных значениях остальных переменных.

Пример 98. Вычислить частные производные 2-го порядка в произвольной точке (x, y) функции

$$f(x, y) = x^2 y + 8x^3 - 2y.$$

Решение. Эта функция-многочлен имеет частные производные любого порядка. При вычислении первой производной по x фиксируем y и наоборот, поэтому $f'_x = 2xy + 24x^2$, $f'_y = x^2 - 2$. Для частных производных 2-го порядка тогда имеем

$$f''_{xx} = 2y + 48x, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 2x, \quad f''_{yy} = 0. \quad \square$$

Замечание. Значение смешанной частной производной в общем случае *зависит от порядка*, в котором производилось дифференцирование. Например, не всегда для функции $u = f(x, y)$ выполняется $f''_{xy} = f''_{yx}$ (см. пример далее).

Понятие n -кратной дифференцируемости. Введём теперь понятие функции $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, которая n раз дифференцируема в данной точке $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$, где $n = 2, 3, 4, \dots$. Функцию $u = f(x_1, \dots, x_m)$ назовём *n раз дифференцируемой в точке M_0* , если она $(n - 1)$ раз дифференцируема в окрестности точки M_0 , и все её частные производные $(n - 1)$ -го порядка представляют собой функции, дифференцируемые в точке M_0 .

Пример 99. В частности, функция f называется дважды дифференцируемой в точке M_0 , если она дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0 , и все её частные производные первого порядка дифференцируемы в этой точке. $\square$

Кратная непрерывная дифференцируемость (гладкость). Класс функций, непрерывных в D вместе со своими производными до порядка k включительно, обозначается $C^k(D)$. Такие функции называют *гладкими* до порядка k в D . Если $f \in C^k(D)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то говорят, что $f \in C^\infty(D)$.

5.2 Достаточные условия n -кратной дифференцируемости и равенства смешанных производных. Теоремы Юнга

«Нигде, как в математике, ясность и точность вывода не позволяют человеку отвернуться от ответа разговорами вокруг вопроса».

А.Д. Александров (1912–1999) — советский математик, физик, философ, альпинист.

Возникает естественный вопрос, при каких условиях функция будет n раз дифференцируемой в заданной точке. Одно только существование в данной точке у функции всех частных производных порядка n , как известно, ещё не гарантирует n -кратную дифференцируемость функции в этой точке. Приведём теорему о том, что дополнительное требование непрерывности всех частных производных порядка n в этой точке уже обеспечивает n -кратную дифференцируемость функции.

Теорема 1 (*достаточное условие n -кратной дифференцируемости*). Для того чтобы функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ была n раз дифференцируема в точке M_0 , достаточно, чтобы все её частные производные n -го порядка существовали в окрестности точки M_0 и были непрерывными в самой точке M_0 .¹

Пример 100. Показать, что функция

$$f(x, y, z) = \sin(3x^2y - 5yz + 1)$$

n раз дифференцируема в произвольной точке (x, y, z) при любом натуральном n (бесконечное число раз дифференцируемая функция).

Решение. Это непосредственно вытекает из непрерывности у данной функции частных производных любого порядка. $\square$

Укажем теперь достаточные условия независимости значений смешанных производных от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

Теорема 2 (*теорема Юнга в 1-й формулировке, или первое достаточное условие равенства смешанных производных*). Если функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$

¹ *Теорема (Шварца).* Если функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет в области D какие-либо две частные производные n -го порядка, то в каждой точке из D , в которой обе эти производные непрерывны, их значения совпадают.

n раз дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, то в этой точке любые две смешанные частные производные этой функции порядка n не зависят от последовательности проводимых дифференцирований и равны между собой.

Иными словами, при этих условиях значение любой n -й смешанной производной не зависит от того порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

Но для существования и равенства смешанных производных, вообще говоря, не обязательно требовать не только n -кратной дифференцируемости функции в точке, но и существования несмешанных производных n -го порядка. Об этом говорит вторая теорема Юнга.

Теорема 3 (*теорема Юнга во 2-й формулировке, или второе достаточное условие равенства смешанных производных*). Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ определена в окрестности точки M_0 и имеет в этой окрестности всевозможные частные производные до $(n-1)$ -го порядка включительно и смешанные производные n -го порядка, причём все смешанные частные производные непрерывны в точке M_0 . Тогда в этой точке все смешанные производные n -го порядка равны.

В общем случае смешанные производные не обязательно равны. Обратимся к примеру.

Пример 101. Показать, что для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

имеет место $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

Решение. В самом деле, вычислим эти производные.

1) При $x^2 + y^2 \neq 0$ имеем:

$$f'_x(x, y) = y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f'_y(x, y) = x \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

2) Если $x = y = 0$, то $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$ найдём по определению:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0.$$

3) Теперь можно найти смешанные производные:

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = -1,$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_y(\Delta x, 0) - f'_y(0, 0)}{\Delta x} = 1. \quad \square$$

5.3 Дифференциалы высших порядков, их связь с кратной дифференцируемостью в случае независимых переменных

Пусть в области D задана функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка. Тогда полным дифференциалом 1-го порядка для этой функции мы называли следующее выражение:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m,$$

где $dx_1, \dots, dx_m$ – произвольные приращения независимых переменных $x_1, \dots, x_m$.¹

Видно, что du также является некоторой функцией от $x_1, \dots, x_m$. Если предположить существование непрерывных частных производных второго порядка для u , то du будет иметь непрерывные частные производные первого порядка. Следовательно, можно говорить о полном дифференциале от этого дифференциала du , т. е. $d(du)$, который назовём *дифференциалом второго порядка* (или вторым дифференциалом) функции u . Для второго дифференциала принято обозначение d^2u .

Важно подчеркнуть, что приращения $dx_1, \dots, dx_m$ при этом рассматриваются как постоянные и остаются одними и теми же при переходе от одного дифференциала к следующему (по порядку).

Если, в общем случае, для функции $u = f(M)$ существуют непрерывные частные производные всех порядков до n -го порядка включительно, то существование n -го дифференциала в произвольной точке в точке M области D обеспечено. Дифференциал n -го порядка в этой точке вводится по индукции как полный дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка:

$$d^n f(M) = d(d^{n-1} f(M)),$$

где приращения $dx_1, \dots, dx_m$ рассматриваются постоянными и *одними и теми же* при переходе от каждого дифференциала, начиная с 1-го порядка, к последующему дифференциалу, вплоть до n -го порядка.

Из определений дифференциала n -го порядка и n -кратной дифференцируемости вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 4 (*о связи n -кратной дифференцируемости функции с существованием n -го дифференциала*). Дифференциал n -го порядка функции f в точке M существует тогда и только тогда, когда функция f дифференцируема n раз в этой точке.

¹Иногда встречается понятие дифференциала *нулевого порядка*, под которым обычно понимают саму функцию: $d^0 f(M) = f(M)$.

2. Перейдём к вопросам **вычисления дифференциалов высших порядков**.

При вычислении второго и последующих дифференциалов приходится существенно различать два случая: 1) случай, когда аргументы $x_1, \dots, x_m$ являются *независимыми переменными*; 2) случай, когда аргументы $x_1, \dots, x_m$ являются соответствующее число раз дифференцируемыми *функциями* некоторых независимых переменных $t_1, \dots, t_k$.

Второй случай более сложный и обобщает первый. Чтобы понять разницу, найдём, например, выражение для дифференциала 2-го порядка для функции $u = u(x, y)$ двух переменных:

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = \\ &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot d(dx) + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot d(dy) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot d^2x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right)dy + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot d^2y. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и учитывая равенство смешанных производных, получаем:¹

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot d^2x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot d^2y. \quad (1)$$

В случае независимых переменных x и y имеем $d^2x = 0$, $d^2y = 0$, поэтому выражение для второго дифференциала упрощается:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

Если же переменные x и y сами являются функциями некоторых других переменных, то их вторые дифференциалы, вообще говоря, не равны нулю и последние два слагаемых в формуле (1) остаются. Аналогично определяется дифференциал третьего порядка d^3u и т. д.

Остановимся на этих двух случаях 1) и 2) подробнее.

Случай 1 (*независимых переменных* $x_1, \dots, x_m$). Обратимся вначале к более простому случаю независимых переменных $x_1, \dots, x_m$.²

Очевидно, развёрнутые выражения последовательных дифференциалов с ростом порядка дифференциала весьма быстро становятся всё более и более

¹Запись dx^2 следует понимать как $(dx)^2$.

²Второй из случаев, когда $x_1, \dots, x_m$ являются функциями других переменных, будет рассмотрен в следующем пункте, посвящённом дифференциалам сложных функций.

сложными. Поэтому в целях упрощения их записи прибегают к использованию специальной символической формы записи. Так, в выражении для первого дифференциала условно «вынесем» букву u за скобки:

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right) \cdot u.$$

Теперь замечаем, что если в выражении для второго дифференциала также «вынести букву u за скобки», то остающееся в скобках выражение формально представляет в раскрытом виде квадрат выражения $\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m$. Поэтому второй дифференциал символически можно записать в форме

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 \cdot u.$$

Аналогично можно записать третий дифференциал и т. д.

В общем случае при любом натуральном n имеем следующую *символическую (компактную) форму записи* дифференциалов высших порядков:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n \cdot u, \quad (2)$$

которую следует понимать так: сначала многочлен, стоящий в скобках, формально возводится по правилам алгебры в степень, затем все полученные члены «умножаются» на u (которое дописывается в числителях при ∂^n), и только после этого всем символам возвращается их значение как частных производных и дифференциалов.

Пример 102. Для функции $u = u(x, y)$ двух независимых переменных имеем:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 \cdot u,$$

а для функции $u = u(x, y, z)$ трёх переменных получим:

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 \cdot u. \quad \square \end{aligned}$$

Ещё раз подчеркнём, что данная формула справедлива лишь для случая независимых переменных $x_1, \dots, x_m$.

Пример 103. Вычислить в произвольной точке (x, y) , а также в точке $(1, 0)$ дифференциал 2-го порядка функции

$$f(x, y) = x^2y + 8x^3 - 2y.$$

Решение. Выше мы уже находили все частные производные 2-го порядка этой функции:

$$f''_{xx} = 2y + 48x, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 2x, \quad f''_{yy} = 0,$$

поэтому

$$d^2f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = (2y + 48x) dx^2 + 4x dx dy.$$

Тогда $d^2f(1, 0) = (2 \cdot 0 + 48 \cdot 1) dx^2 + (4 \cdot 1) dx dy = 48 dx^2 + 4 dx dy$. $\square$

Замечание 1. В рассматриваемом случае, когда аргументы $x_1, \dots, x_m$ являются независимыми переменными, для второго дифференциала два раза дифференцируемой в данной точке функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ справедливо другое – эквивалентное – представление

$$d^2u = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k.$$

Из курса алгебры известно, что функция m переменных $t_1, \dots, t_m$ вида $\Phi = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} t_i t_k$, где a_{ik} – некоторые действительные числа, называется *квадратичной формой* от переменных $t_1, \dots, t_m$, а числа a_{ik} – её коэффициентами. При этом квадратичная форма называется *симметричной*, если её коэффициенты удовлетворяют условию $a_{ik} = a_{ki}$ для всех $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, m}$.

Замечание 2 (интерпретация 2-го дифференциала как квадратичной формы). Полученное выше выражение для второго дифференциала в случае независимых переменных представляет собой симметричную квадратичную форму от дифференциалов $dx_1, \dots, dx_m$, а её коэффициенты равны соответствующим частным производным второго порядка, взятым в данной точке M .

По индукции можно доказать, что в случае, когда аргументы $x_1, \dots, x_m$ дифференцируемой n раз в данной точке M функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ являются независимыми переменными, для n -го дифференциала этой функции справедливо представление

$$d^n u = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_n}$$

или, используя *полиномиальную формулу* (обобщение бинома Ньютона)

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m},$$

где $0 \leq n_i \leq n$, $n_i \in \mathbb{Z}$, в эквивалентном виде

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n \cdot u.$$

Замечание 3 (дифференциал в общем случае). Как отмечалось выше, совершенно другой – более сложный – вид имеют выражения для второго и последующих дифференциалов в случае, когда аргументы $x_1, \dots, x_m$ функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ являются соответствующее число раз дифференцируемыми функциями некоторых независимых переменных $t_1, \dots, t_k$. Проводя рассуждения, аналогичные выводу формулы (1), в общем случае для дифференциала 2-го порядка получаем

$$\begin{aligned} d^2 u &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 \cdot u + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot d^2 x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot d^2 x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot d^2 x_m. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что если, в частности, переменные $x_1, \dots, x_m$ являются *линейными функциями* независимых переменных $t_1, \dots, t_k$, т. е. имеют вид

$$x_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}t_1 + \alpha_{i2}t_2 + \dots + \alpha_{ik}t_k \quad (i = \overline{1, k}),$$

где $\alpha_{i0}, \dots, \alpha_{ik}$ – некоторые постоянные коэффициенты, то n -й дифференциал такой сложной функции определяется той же «сокращённой» формулой (2), что и для случая независимых переменных $x_1, \dots, x_m$:

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 \cdot u.$$

5.4 Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Полная производная

«Очевидно» — самое опасное слово в математике.

Эрик Темпл Белл (англ. Eric Temple Bell; 1883–1960) – американский математик и автор научно-фантастических книг.

Если зависимость функции от аргументов задана через некоторые промежуточные переменные, т. е. мы имеем дело с композицией функций, то говорят, что задана *сложная функция*. Конечно, теоретически можно подставить все

Случай 2 (*переменные $x_1, \dots, x_m$ являются зависимыми*). Обратимся ко второму случаю, когда аргументы $x_1, \dots, x_m$ функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ являются соответствующее число раз дифференцируемыми функциями некоторых независимых переменных $t_1, \dots, t_k$. Иными словами, рассмотрим сложную функцию

[illegible]

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m,$$

Наряду с данной формулой для первого дифференциала справедлива формула

$$du = \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial t_k} dt_k$$

Арифметические операции над дифференциалами. Из свойства инвариантности первого дифференциала вытекают следующие правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух дифференцируемых функций m переменных:

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(c \cdot u) = c \cdot du \quad (c = \text{const}),$$

¹Инвариантность формы первого дифференциала является весьма удобным его свойством. При записи $df(M)$ мы можем не задумываться о том, являются ли переменные $x_1, \dots, x_m$ независимыми. К тому же, во многих прикладных задачах часто бывает затруднительно выяснить вопрос о независимости переменных.

$$d(uv) = u dv + v du, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

Пример 104. Покажем, что $d(uv) = u dv + v du$.

Решение. Согласно теореме о дифференцируемости сложной функции имеем

$$\begin{aligned} d(uv) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^m \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx_i = \\ &= u \sum_{i=1}^m \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_i + v \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = u dv + v du. \quad \square \end{aligned}$$

Дифференциалы высших порядков. Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$, $G \subset \mathbb{R}^k$, $x_i : G \rightarrow \mathbb{R}$, $x_i \in C^2(G)$, $i = \overline{1, m}$. Найдём выражение для второго дифференциала как дифференциала от первого дифференциала:

$$\begin{aligned} d^2 u &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1\right) + \dots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m\right) = \\ &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} d(dx_1) + \dots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) dx_m + \frac{\partial u}{\partial x_m} d(dx_m) = \\ &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) dx_m + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot d^2 x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot d^2 x_m = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_m} dx_m\right) dx_1 + \dots \\ &\dots + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} dx_m\right) dx_m + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot d^2 x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot d^2 x_m = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 \cdot u + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot d^2 x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot d^2 x_m = \\ &= \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} d^2 x_i. \end{aligned}$$

Очевидно, что для дифференциала порядка выше 1-го инвариантность формы не имеет места. Заметим, что если переменные $x_1, \dots, x_m$ являются независимыми, то последняя группа слагаемых (содержащая дифференциалы вторых порядков этих переменных) обнуляется и получаем более простую, уже известную, формулу вычисления второго дифференциала.

В общем случае, дифференциалы высших порядков сложной функции определяются рекуррентно. Пусть $f \in C^n(D)$, $x_i \in C^n(G)$, $i = \overline{1, m}$, тогда

$$d^n u = d(d^{n-1} u).$$

Напомним, что если $x_1, \dots, x_m$ являются линейными функциями от $t_1, \dots, t_k$

$$x_i = \alpha_i^1 t_1 + \dots + \alpha_i^k t_k + \beta_i$$

(α_i^j, β_i – постоянные), то $d^2x_i = d^3x_i = \dots = 0, i = \overline{1, m}$, и дифференциалы высших порядков будут находиться по тем же формулам, что и дифференциалы для независимых переменных. Таким образом, при линейной замене переменных форма второго дифференциала (и дифференциалов более высоких порядков) инвариантна:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f.$$

Пример 105. Пусть $u = f(t)$, где $t = t(x, y, z)$, f и t – дважды дифференцируемые функции. Найти d^2u и d^3u в зависимости от промежуточной переменной t .

Решение. Последовательно дифференцируя, имеем:

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial t}dt\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt^2 + \frac{\partial u}{\partial t}d^2t; \\ d^3u &= d(d^2u) = d\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt^2 + \frac{\partial u}{\partial t}d^2t\right) = d\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dt^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}d(dt^2) + d\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)d^2t + \frac{\partial u}{\partial t}d^3t = \\ &= \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}dt^3 + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}2dtdt^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dtd^2t + \frac{\partial u}{\partial t}d^3t = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}dt^3 + 3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dtdt^2 + \frac{\partial u}{\partial t}d^3t. \quad \square \end{aligned}$$

Частные производные сложной функции. Рассмотрим вопрос о нахождении частных производных сложной функции (3).

Теорема 5 (*о дифференцируемости сложной функции*). Если каждая из функций x_i , $i = \overline{1, m}$, в (3) дифференцируема в данной точке $N(t_1, \dots, t_k)$, а функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема в соответствующей точке $M(x_1, \dots, x_m)$, где $x_i = x_i(N)$, то сложная функция $u = f(x_1(N), \dots, x_m(N))$ также дифференцируема в точке N , причём для частных производных этой функции по $t_1, \dots, t_k$ справедливы формулы

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial u}{\partial t_k} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k}, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

где все частные производные $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ берутся в точке N , а $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ – в точке M .

Следствие. В частном случае, когда все функции (3) зависят только от одного аргумента t , вместо (4) получаем:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{dx_m}{dt}.$$

Рассмотрим примеры на вычисление частных производных.

Пример 106. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x \cdot e^y$, где $x(t) = t^3 + 3$, $y(t) = 2t^4 + 1$.

Решение. Дифференцируя по t как сложную функцию, получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^y \cdot 3t^2 + x e^y \cdot 8t^3, \quad \text{где } x = t^3 + 3, y = 2t^4 + 1. \quad \square$$

Пример 107. Найти частные производные функции $u = f(x, y)$ по s и t , где

$$x = 3s + t, \quad y = s^2.$$

Решение. Согласно формулам (4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot 3 + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot 2s = 3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 2s \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot 0 = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 108. Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема во всех точках пространства $\mathbb{R}^2$. Перейти к полярным координатам и найти выражения для $\frac{\partial f}{\partial r}$ и $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$.

Решение. Положим $F(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-r \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot r \cos \varphi = -y \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial f}{\partial y}. \quad \square \end{aligned}$$

В следующем примере покажем обратный приём, связанный с введением промежуточных переменных при вычислении дифференциала.

Пример 109. Найти дифференциал функции $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Решение. Вместо того чтобы напрямую вычислять первый дифференциал, сделаем подстановку $u = \frac{y}{x}$ (т. е. введём промежуточную переменную), тогда

$$dz = d(\operatorname{arctg} u) = \frac{du}{1 + u^2} = \frac{d(\frac{y}{x})}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}. \quad \square$$

Для вычисления частных производных высших порядков сложных функций используется формула (4) вычисления первых производных сложной функции, учитывая, что все частные производные сами есть сложные функции данных аргументов.

О матрице Якоби дифференцируемого сложного отображения. Пусть имеется сложное отображение $f = h \circ g$, где $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^k$, $h : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, $h \in C^1(E)$. Тогда матрица Якоби композиции отображений h и g равна произведению матриц Якоби составляющих композицию отображений:

$$J_{h \circ g} = J_h \cdot J_g.$$

Пример 110. Найти матрицу Якоби отображения $f = h \circ g$, где $f : (u, v) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$,
 $g : x = u \cos v, y = u \sin v, z = uv, \quad h : \xi = x^2 - y^2, \eta = xz, \zeta = yz.$

Решение. Находя соответствующие производные, получаем

$$J_g = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ v & u \end{pmatrix}, \quad J_h = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_{h \circ g} &= J_h \cdot J_g = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ v & u \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2x \cos v - 2y \sin v & -2xu \sin v - 2yu \cos v \\ z \cos v + xv & -zu \sin v + xu \\ z \sin v + yv & zu \cos v + yu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \cos(2v) & -2u^2 \sin(2v) \\ 2uv \cos v & u^2 \cos v - u^2 v \sin v \\ 2uv \sin v & u^2 \sin v + u^2 v \cos v \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Понятие полной производной сложной функции. Пусть имеется сложная функция $F(u, x_1, \dots, x_m)$, где $u = u(x_1, \dots, x_m)$. Тогда наряду с частной производной $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ по переменной x_1 (которая находится в предположении, что остальные переменные $u, x_2, \dots, x_m$ фиксированы) существует понятие *полной производной* по переменной x_1 , под которой понимается выражение

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1},$$

в котором учитывается полная информация о вхождении x_1 в сложную функцию, т. е. что x_1 является не только одним из аргументов функции, но и входит в состав другого аргумента. Такое же замечание можно сделать по отношению к переменным $x_2, \dots, x_m$.

Обратите внимание, что в отличие от частной производной, обозначаемой «скруглённой» буквой ∂ (т. е. $\frac{\partial F}{\partial x_1}$), полная производная по x_1 обозначается «прямой» буквой d (т. е. $\frac{dF}{dx_1}$).

Разъясним их разницу на простых примерах.

Пример 111. Найти полную производную по переменной x функции

$$F(x, y, z(x, y)),$$

где x, y — независимые переменные.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции, учитывая, что y от x не зависит, имеем для полной производной

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

При этом $\frac{\partial F}{\partial x}$ есть частная производная по x (как производная по первому из аргументов функции F , который совпал с x , при фиксированных y и z). $\square$

Ещё два примера.

Пример 112. Дана функция $z = z(t, x, y)$, причём $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда z , в конечном счёте, зависит только от t . Полная производная обозначается $\frac{dz}{dt}$ и вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

При вычислении полной производной (в отличие от частной производной $\frac{\partial z}{\partial t}$, когда x и y считаются фиксированными) принимается в расчёт зависимость x и y от t . $\square$

Пример 113. Найти частную и полную производные функции $z = z(x, y(x))$ по переменной x , если

$$z = \sin(x^2 y), \quad \text{где } y(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

Решение. 1) Найдём частную производную по x (y считаем фиксированным числом): $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x^2 y) \cdot 2xy$.

2) Найдём полную производную по x (y считаем функцией от x):

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \cos(x^2 y) \cdot 2xy + \cos(x^2 y) \cdot x^2 \cdot y' = \\ &= \cos(x^2 y)(2xy + x^2 y') = \cos(x^2 y) \left(2xy + x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right). \end{aligned}$$

Если нужно выразить производные только через x , следует в полученных выражениях подставить $\sqrt{1 + x^2}$ вместо y . $\square$

5.5 Задачи для самостоятельного решения

Вычисление частных производных и дифференциалов высших порядков:

№248. [8, № 3257] Найти смешанную частную производную 3-го порядка:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \quad \text{если } u = x \cdot \ln(xy).$$

№249. [8, № 3260], [3, № 3197] Найти смешанную частную производную 3-го порядка:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \text{если } u = e^{xyz}.$$

№250. Найти частные производные 3-го и 4-го порядков функции

$$u = x^3 + y^3 - 3x^2y.$$

№251. [8, № 3230.1] Существует ли конечная $f''_{xy}(0, 0)$, если

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{при } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

№252. [8, № 3230] Показать, что $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$, если

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

№253. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $z = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{y}{x}\right)$.

№254. [3, № 3204] При каком значении параметра a функция $z = x^3 + axy^2$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

№255. [8, № 3307] Показать, что функция

$$u = \ln \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

(a и b – постоянные) удовлетворяет уравнению Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

№256. Доказать, что функция $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

№257. Найти $d^2 z(1, 1)$, если $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$. Решить задачу двумя способами: 1) найдя второй дифференциал как дифференциал от первого дифференциала; 2) найдя $d^2 z$ по формуле второго дифференциала.

№258. Найти $d^2 u$, если $u = e^{xy}$, x, y — независимые переменные.

№259. Найти дифференциал второго порядка функции

$$u = e^{xy} + \operatorname{arctg} \frac{y}{z}.$$

№260. Найти дифференциал третьего порядка функции $u = x^2 y \cdot \ln(2z + 1)$ в точке $M_0(2, 1, 1)$.

№261. [8, № 3269] Найти $d^3 u$, если $u = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$.

№262. [8, № 3273] Найти $d^3 u$, если $u = xyz$.

№263. [8, № 3270] Найти полный дифференциал $d^3 u$, если $u = \sin(x^2 + y^2)$.

Нахождение частных, полных производных и дифференциалов сложных функций:

№264. Найти частную и полную производные сложной функции $u = u(x, y, z(x, y))$ по переменной x , если x, y — независимые переменные и

$$u = e^{2x-y+z}, \quad \text{где } z(x, y) = \sin(x^5 y).$$

№265. [3, № 3126] Избегая непосредственной подстановки, дифференцируя как сложную функцию $z = z(x, y)$, найти производную $\frac{dz}{dt}$, если

$$z = \arcsin(x - y), \quad \text{где } x(t) = 3t, \quad y(t) = 4t^3.$$

№266. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = xy^3$, где $x = \sqrt{t}$, $y = \cos(t^2)$.

№267. Найти производную $\frac{df}{dt}$ сложной функции $f(x, y, z) = x^2 + y \sin z$, где $x = t^3$, $y = 2t$, $z = t^2 + 1$.

№268. [3, № 3128] Избегая непосредственной подстановки, дифференцируя как сложную функцию $z = z(x, y)$, найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2 \ln y$, где $x(u, v) = \frac{u}{v}$, $y(u, v) = 3u - 2v$.

№269. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции $z = e^{u-2v}$, где $u = \cos x$, $v = 3x + y^2$.

№270. Пусть $z(u, v) = \sin(uv^2)$, где $u(x, y) = x - 3y$, $v(x, y) = x + y$. Найти частные производные первого порядка сложной функции $z(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$ в произвольной точке и в точке $x = 1, y = 0$.

№271. [3, № 3131] Избегая непосредственной подстановки, дифференцируя как сложную функцию $u = u(x, z)$, найти производную $\frac{du}{dx}$, если $u = \arcsin \frac{x}{z}$, $z = \sqrt{x^2 + 1}$.

№272. Найти первый дифференциал функции $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \{(u, v) \mid v > 0\}$, в произвольной точке $(u, v) \in D$, если

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, \quad \text{где } x = uv, y = \frac{u}{v}, z = u + v.$$

№273. [8, № 3277] Найти полный дифференциал $d^n u$, если

$$u = f(x + y + z).$$

№274. [8, № 3283] Найти частные производные первого и второго порядков от сложной функции

$$u(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2).$$

№275. [8, № 3285] Найти производные первого и второго порядков от сложной функции

$$u(x, y, z) = f(x, xy, xyz).$$

№276. [10, с. 32] Найти частные производные первого порядка и полный дифференциал сложной функции

$$u = (\vec{k}, \vec{r}) = k_x x + k_y y + k_z z,$$

где $\vec{r} = \{x, y, z\}$, $\vec{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$ – постоянный вектор. Ответ записать, используя обозначение $\vec{dr} = \{dx, dy, dz\}$.

№277. [8, № 3305] Пусть $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и f – дважды дифференцируемая функция. Показать, что $\Delta u = F(r)$, где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, и найти функцию F .

№278. [3, № 3139] Доказать, что для любой дифференцируемой функции f функция $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

№279. Дана дифференцируемая функция $u = f(x, y)$, где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Показать, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

№280. [10, с. 33] Доказать, что произвольная дифференцируемая функция

$$u = f\left(\frac{x}{y}, x^2 + y - z^2\right)$$

является решением уравнения

$$2xz \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 2yz \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + (2x^2 + y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

№281. [10, с. 33] Восстановить уравнение в частных производных первого порядка по его решению

$$z = f(u), \quad \text{где } u = xye^{x^2-y^2},$$

f – произвольная дифференцируемая функция.

№282. Найти du , d^2u , выразив эти дифференциалы через: 1) дифференциалы переменной v ; 2) дифференциалы переменной s , если $u = e^v + 3v$, $v = v(s)$.

№283. Найти частные производные f'_x , f'_y и дифференциал df , если

$$u = f(x - y^2, x^2 + y^3).$$

№284. Найти частные производные f'_x , f'_y и полный дифференциал df сложной функции

$$f(u, v) = u \ln v, \quad \text{если } u = xy, \quad v = x^2 + y^2.$$

№285. Найти дифференциал 1-го порядка дифференцируемой сложной функции

$$u = f(x + y, y - z).$$

№286. Найти du и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, если $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

№287. [8, № 3298] Найти d^2u , если $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

№288. Дана сложная функция $z = \ln(3x + 5y)$, где $x = \cos t$, $y = \sin t$. Найти полную производную $\frac{dz}{dt}$.

№289. Найти производную $\frac{dz}{dx}$ сложной функции

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad \text{где } y = e^{(1+x)^2}.$$

№290. Дана функция $z = x^3 + 3y^2 - 5$, где $x = \sin t$, $y = e^t$. Найти $\frac{d^2 z}{dt^2}$.

№291. Найти первый и второй дифференциалы дважды дифференцируемой функции

$$u(x, y, z) = f(x^2 - y^2 + z^2).$$

№292. Найти первый и второй дифференциалы функции

$$u(x, y, z) = f(xyz + x - y + z).$$

№293. Найти первый и второй дифференциалы функции

$$u(x, y, z) = f(xy - zx - 2yz).$$

№294. [8, № 3284] Найти производные 1-го и 2-го порядков от сложной функции $u = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$, где x, y – независимые переменные.

№295. Найти df и d^2f дважды дифференцируемой функции $f(\xi, \eta)$, где $\xi = \cos(x + y)$, $\eta = e^{xy}$ (в терминах независимых переменных x и y).

№296. Найти df и d^2f дважды дифференцируемой функции $f(\xi, \eta)$, где $\xi = \cos(xy)$, $\eta = e^{x+y}$ (в терминах независимых переменных x и y).

№297. Найти d^2V и $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ дважды дифференцируемой функции

$$V = V(x^2, x - 2y),$$

где x, y – независимые переменные.

№298. [8, № 3297] Найти полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков дважды дифференцируемой функции

$$f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2),$$

где x, y, z – независимые переменные.

№299. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$ и d^2u , если $u = u(x + y + z, z - 1)$, где x, y, z – независимые переменные.

№300. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ и du , если $u = f\left(x, \frac{x}{y}, \frac{xy}{z}\right)$, где x, y, z – независимые переменные.

№301. [10, с. 60] Найти второй дифференциал функции

$$z = f(u, v, w), \quad \text{где } u = xy, \ v = x - y, \ w = x + y.$$

№302. Пусть f – дважды дифференцируемая функция двух переменных. Найти в произвольной точке (x, y) частную производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ функции

$$u(x, y) = f(f(x + y^2, x), y).$$

№303. Найти дифференциал функции

$$z = f(f(f(2x + y)))$$

там, где он существует, если $f(t) = 1 - \frac{1}{t}$, $t \neq 0; 1$.

5.6 Ответы и решения

248. Имеем при $xy > 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ln(xy) + x \cdot \frac{y}{xy} = \ln(xy) + 1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\ln(xy) + 1) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \right) = 0.$$

249. Последовательно находим: $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xyz} \cdot yz$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = z(e^{xyz} \cdot xz \cdot y + e^{xyz}) = z \cdot e^{xyz}(xyz + 1),$$

Далее, поскольку $(f_1 f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} &= e^{xyz}(xyz + 1) + z(xyz + 1)e^{xyz} \cdot xy + ze^{xyz} \cdot xy = \\ &= e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2). \end{aligned}$$

250. Эта функция дифференцируема любое число раз, поскольку у неё существуют частные производные любого порядка, которые являются непрерывными. Найдём их:

$$u'_x = 3x^2 - 6xy, \quad u'_y = 3y^2 - 3x^2,$$

$$u''_{xx} = 6x - 6y, \quad u''_{xy} = u''_{yx} = -6x, \quad u''_{yy} = 6y,$$

$$u'''_{xxx} = 6, \quad u'''_{xxy} = u'''_{xyx} = u'''_{yxx} = -6, \quad u'''_{xyy} = u'''_{yxy} = u'''_{yyx} = 0, \quad u'''_{yyy} = 6.$$

Производные 4-го и высших порядков равны 0.

251. При $x^2 + y^2 > 0$ частная производная по x существует, причём $f'_x(x, y) = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$. Производную $f'_x(0, 0)$ найдём по определению как предел

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x \cdot 0}{x^2 + 0^2} - 0}{x} = 0.$$

Найдём теперь $f''_{xy}(0, 0)$:

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{2y(y^2 - 0^2)}{(0^2 + y^2)^2} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y^3}{y^5} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{y^2} = +\infty.$$

Следовательно, конечная производная $f''_{xy}(0, 0)$ не существует.

252. 1) При $x^2 + y^2 \neq 0$ имеем:

$$f'_x(x, y) = y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f'_y(x, y) = x \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

2) Если $x = y = 0$, то $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$ найдём по определению:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0.$$

3) Теперь можно найти смешанные производные:

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = -1,$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_y(\Delta x, 0) - f'_y(0, 0)}{\Delta x} = 1.$$

253. Дифференцируя, получим: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{2}{\sin(2y/x)},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2}{x^3 \sin^2(2y/x)} \cdot (2y \cos(2y/x) - x \sin(2y/x)).$$

254. По условию, $z = x^3 + axy^2$. Найдём частные производные и подставим в уравнение: $z'_x = 3x^2 + ay^2$, $z''_{xx} = 6x$, $z'_y = 2axy$, $z''_{yy} = 2ax$. Тогда $6x + 2ax = 0 \Leftrightarrow a = -3$.

255. Найдём частные производные и подставим в уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(x - a)^2 + (y - b)^2 - 2(x - a)^2}{((x - a)^2 + (y - b)^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(x - a)^2 + (y - b)^2 - 2(y - b)^2}{((x - a)^2 + (y - b)^2)^2}.$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

256. Найдём частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right)'_x = 3x^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Аналогично находятся

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3y^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3z^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Складывая вторые производные, получаем необходимый результат.

257. 1) Непосредственным дифференцированием найдём первый дифференциал:

$$\begin{aligned} dz &= d(x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2) = 4x^3 dx + 4y^3 dy - 2x dx - 2(x dy + y dx) - 2y dy = \\ &= (4x^3 - 2x - 2y) dx + (4y^3 - 2x - 2y) dy. \end{aligned}$$

Продифференцируем ещё раз:

$$\begin{aligned} d^2 z &= d((4x^3 - 2x - 2y) dx + (4y^3 - 2x - 2y) dy) = \\ &= (12x^2 dx - 2dx - 2dy) dx + (12y^2 dy - 2dx - 2dy) dy = \\ &= (12x^2 - 2) dx^2 - 4 dx dy + (12y^2 - 2) dy^2. \end{aligned}$$

Тогда $d^2 z(1, 1) = 10 dx^2 - 4 dx dy + 10 dy^2$.

2) Вычислим производные первого и второго порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 2$$

и затем воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} d^2 z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \\ &= (12x^2 - 2) dx^2 - 4 dx dy + (12y^2 - 2) dy^2 \Big|_{(1,1)} = 10 dx^2 - 4 dx dy + 10 dy^2. \end{aligned}$$

258. Имеем $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = ye^{xy} dx + xe^{xy} dy = e^{xy}(y dx + x dy)$;

$$\begin{aligned} d^2 u &= \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \cdot u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 = \\ &= e^{xy}(y^2 dx^2 + 2(1 + xy) dx dy + x^2 dy^2). \end{aligned}$$

259. Найдём частные производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= ye^{xy}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= xe^{xy} + \frac{z}{z^2 + y^2}, & \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{y}{z^2 + y^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= y^2 e^{xy}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x^2 e^{xy} - \frac{2yz}{(z^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{2yz}{(z^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= e^{xy}(1 + xy), & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{y^2 - z^2}{(z^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= 0.\end{aligned}$$

Подставляя в выражение для 2-го дифференциала, получаем

$$\begin{aligned}d^2u &= y^2 e^{xy} dx^2 + \left(x^2 e^{xy} - \frac{2yz}{(z^2 + y^2)^2} \right) dy^2 + \frac{2yz}{(z^2 + y^2)^2} dz^2 + \\ &+ 2 \left(e^{xy}(1 + xy) dx dy + \frac{y^2 - z^2}{(z^2 + y^2)^2} dy dz \right).\end{aligned}$$

260. Найдём необходимые частные производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 2xy \cdot \ln(2z + 1), & \frac{\partial u}{\partial y} &= x^2 \cdot \ln(2z + 1), & \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{2x^2 y}{2z + 1}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2y \cdot \ln(2z + 1), & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -\frac{4x^2 y}{(2z + 1)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 2x \cdot \ln(2z + 1), & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{4xy}{2z + 1}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{2x^2}{2z + 1}, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 0, & \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} &= 2 \ln(2z + 1), & \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} &= \frac{16x^2 y}{(2z + 1)^3}, & \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} &= \frac{4y}{2z + 1}, & \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} &= -\frac{8xy}{(2z + 1)^2}, & \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} &= -\frac{4x^2}{(2z + 1)^2}, & \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} &= \frac{4x}{2z + 1}.\end{aligned}$$

Поэтому, используя формулу $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$, т. е. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab^2 + cb^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + 2abc)$, получаем

$$\begin{aligned}d^3u &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^3 \cdot u = \\ &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} dz^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y^2} dz dy^2 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} dx dz^2 +\end{aligned}$$

$$+3\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} dy dz^2 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} dy dx^2 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x^2} dz dx^2 + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} dx dy dz.$$

Наконец, вычислим третий дифференциал в точке $M_0(2, 1, 1)$:

$$d^3 u(M_0) = \frac{64}{27} dz^3 - \frac{16}{3} dx dz^2 - \frac{16}{3} dy dz^2 + 6 \ln 3 dx^2 dy + 4 dx^2 dz + 16 dx dy dz.$$

261. Приведём функцию к виду $u = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$. Найдём частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 + 6xy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -6x + 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y + 6x,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 6, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -6.$$

Тогда третий дифференциал вычислим по формуле

$$\begin{aligned} d^3 u &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 \cdot u = \\ &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3 = \\ &= 6 dx^3 - 18 dx^2 dy + 18 dx dy^2 + 6 dy^3 = 6(dx^3 - 3 dx^2 dy + 3 dx dy^2 + dy^3). \end{aligned}$$

262. Выпишем формулу для дифференциала 3-го порядка:

$$d^3 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^3 \cdot u.$$

В силу формулы $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(a + c)$ получим:

$$\begin{aligned} d^3 u &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} dz^3 + \\ &+ 3 \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial z} dz \right) \cdot u. \end{aligned}$$

Так как функция $u = xyz$ линейна по каждой переменной, то все производные 3-го порядка, в которых происходит дифференцирование по любой из переменных более одного раза, равны нулю. Неравными нулю в этом выражении

остаются лишь производные, в которых последовательное дифференцирование происходит по трём разным переменным, таких производных – шесть, и все они равны 1:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x} = 1.$$

Поэтому $d^3 u = 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} dx dy dz = 6 dx dy dz$.

263. Вычислим частные производные до 3-го порядка включительно:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 (\cos(x^2 + y^2) - 2x^2 \sin(x^2 + y^2)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 (\cos(x^2 + y^2) - 2y^2 \sin(x^2 + y^2)), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -4xy \sin(x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 2 (-6x \sin(x^2 + y^2) - 4x^3 \cos(x^2 + y^2)),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 2 (-6y \sin(x^2 + y^2) - 4y^3 \cos(x^2 + y^2)),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 2 (-2y \sin(x^2 + y^2) - 4x^2 y \cos(x^2 + y^2)),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = -4x (\sin(x^2 + y^2) + 2y^2 \cos(x^2 + y^2)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} d^3 u &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 \cdot u = \\ &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3 = \\ &= -4x (3 \sin(x^2 + y^2) + 2x^2 \cos(x^2 + y^2)) dx^3 + \\ &+ 3 \cdot (-4y) (\sin(x^2 + y^2) + 2x^2 \cos(x^2 + y^2)) dx^2 dy + \\ &+ 3 \cdot (-4x) (\sin(x^2 + y^2) + 2y^2 \cos(x^2 + y^2)) dx dy^2 - \\ &- 4y (3 \sin(x^2 + y^2) + 2y^2 \cos(x^2 + y^2)) dy^3 = \\ &= -8(x dx + y dy)^3 \cos(x^2 + y^2) - 12(x dx + y dy)(dx^2 + dy^2) \sin(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

264. 1) Найдём частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ (y, z считаются фиксированными числами):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x-y+z} = 2e^{2x-y+\sin(x^5y)}.$$

2) Найдём полную производную $\frac{du}{dx}$ (z считаем функцией от x, y):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x-y+z} + e^{2x-y+z} \cos(x^5y) \cdot 5x^4y = \\ &= e^{2x-y+\sin(x^5y)}(2 + 5x^4y \cos(x^5y)). \end{aligned}$$

265. Найдём $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}, \frac{dx}{dt} = 3,$
 $\frac{dy}{dt} = 12t^2$. Тогда $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 3 - \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 12t^2 = \frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.$$

266. При $t > 0$ имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = y^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} + 3xy^2(-2t \cdot \sin(t^2)).$$

Подставим x и y через t : $\frac{dz}{dt} = \frac{\cos^3(t^2)}{2\sqrt{t}} - 3\sqrt{t^3} \cdot \cos(t^2) \cdot \sin(2t^2)$.

267. Дифференцируя сложную функцию, находим

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 2x \cdot 3t^2 + \sin z \cdot 2 + y \cos z \cdot 2t,$$

где осталось подставить вместо x, y, z их выражения через t .

268. Найдём производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \ln y, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y}, \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}, \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2},$
 $\frac{\partial y}{\partial u} = 3, \frac{\partial y}{\partial v} = -2$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = 2x \ln y \cdot \frac{1}{v} + \frac{x^2}{y} \cdot 3 = \frac{2u}{v^2} \ln(3u-2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u-2v)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = -2x \cdot \ln y \cdot \frac{u}{v^2} - 2 \cdot \frac{x^2}{y} = -\frac{2u^2}{v^3} \ln(3u-2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}.$$

269. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Найдём необходимые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^{u-2v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -2e^{u-2v}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y.$$

Подставляя, окончательно получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -e^{u-2v}(\sin x + 6) = e^{\cos x - 6x - 2y^2}(\sin x + 6),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4y e^{u-2v} = -4y e^{\cos x - 6x - 2y^2}.$$

270. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Подставляя известные значения производных, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= v^2 \cos(uv^2) \cdot 1 + 2uv \cos(uv^2) \cdot 1 = \\ &= (3x^2 - 2xy - 5y^2) \cos((x-3y)(x+y)^2) \Big|_{(1,0)} = 3 \cos 1; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= v^2 \cos(uv^2) \cdot (-3) + 2uv \cos(uv^2) \cdot 1 = \\ &= -(x^2 + 10xy + 9y^2) \cos((x-3y)(x+y)^2) \Big|_{(1,0)} = -\cos 1. \end{aligned}$$

271. Найдём производные $u = u(x, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x}{z\sqrt{z^2 - x^2}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Тогда

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}} - \frac{x}{z\sqrt{z^2 - x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

272. Воспользуемся инвариантностью формы первого дифференциала:

$$df = (3x^2 - 3yz)dx + (3y^2 - 3xz)dy + (3z^2 - 3xy)dz =$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \left(\left(u^2 v^2 - \frac{u^2}{v} - u \right) (v du + u dv) + \left(\frac{u^2}{v^2} - u^2 v - u v^2 \right) \frac{v du - u dv}{v^2} + \right. \\
&\quad \left. + ((u + v)^2 - u^2)(du + dv) \right) = \\
&= 3 \left(\left(u^2 v^3 - 2u^2 + v^2 + \frac{u^2}{v^3} \right) du + \left(-\frac{u^3}{v^4} + u^3 v^2 + 2uv + v^2 \right) dv \right).
\end{aligned}$$

273. Воспользуемся тем свойством дифференциалов n -го порядка от сложной функции $f(t)$, что их форма имеет такой же вид, как при независимой переменной t , и в том случае, когда аргумент t является линейной функцией переменных x, y, z : $t = ax + by + cz + q$, т. е. $d^n f = f^{(n)}(t) dt^n$. В данном случае $t = x + y + z$, поэтому окончательно имеем

$$d^n f = f^{(n)}(t) dt^n = f^{(n)}(x + y + z) d(x + y + z)^n.$$

274. Положим $t = x^2 + y^2 + z^2$.

1-й способ. 1) По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = f'(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2x.$$

Аналогично находим $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$.

2) Найдём частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (f' \cdot 2x) = \frac{\partial}{\partial x} (f') \cdot 2x + f' \frac{\partial}{\partial x} (2x) = \\
&= f'' \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \cdot 2x + 2f' = 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2) + 2f'(x^2 + y^2 + z^2).
\end{aligned}$$

Аналогично для $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Наконец,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (f' \cdot 2x) = 2x \cdot f'' \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = 4xy \cdot f''(x^2 + y^2 + z^2).$$

Аналогично для $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$.

2-й способ. Можно было воспользоваться формулой $d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt^2 + \frac{\partial u}{\partial t} d^2 t$.

275. Обозначим $t_1 = x$, $t_2 = xy$, $t_3 = xyz$.

1) Для производных 1-го порядка имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t_3} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial x} = f'_1 + f'_2 \cdot y + f'_3 \cdot yz,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t_3} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial y} = f'_2 \cdot x + f'_3 \cdot xz, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t_3} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial z} = f'_3 \cdot xy.\end{aligned}$$

2) Найдём частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(f'_1 + f'_2 \cdot y + f'_3 \cdot yz) = \left(f''_{11} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + f''_{12} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x} + f''_{13} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial x} \right) + \\ &+ y \left(f''_{21} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + f''_{22} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x} + f''_{23} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial x} \right) + yz \left(f''_{31} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + f''_{32} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x} + f''_{33} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial x} \right) = \\ &= f''_{11} + y \cdot f''_{12} + yz \cdot f''_{13} + y(f''_{21} + y \cdot f''_{22} + yz \cdot f''_{23}) + yz \cdot (f''_{31} + y \cdot f''_{32} + yz \cdot f''_{33}) = \\ &= f''_{11} + y^2 \cdot f''_{22} + y^2 z^2 \cdot f''_{33} + 2y \cdot f''_{12} + 2yz \cdot f''_{13} + 2y^2 z f''_{23}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(f'_2 \cdot x + f'_3 \cdot xz) = x \left(f''_{21} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + f''_{22} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} + f''_{23} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial y} \right) + \\ &+ xz \left(f''_{31} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + f''_{32} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} + f''_{33} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial y} \right) = \\ &= x(f''_{21} \cdot 0 + f''_{22} \cdot x + f''_{23} \cdot xz) + xz(f''_{31} \cdot 0 + f''_{32} \cdot x + f''_{33} \cdot xz) = \\ &= x^2 \cdot f''_{22} + 2x^2 z \cdot f''_{23} + x^2 z^2 \cdot f''_{33}.\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}(f'_3 \cdot xy) = xy \left(f''_{31} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial z} + f''_{32} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial z} + f''_{33} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial z} \right) = \\ &= xy(f''_{31} \cdot 0 + f''_{32} \cdot 0 + f''_{33} \cdot xy) = x^2 y^2 \cdot f''_{33}.\end{aligned}$$

Найдём смешанные производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(f'_1 + f'_2 \cdot y + f'_3 \cdot yz) = \left(f''_{11} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + f''_{12} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} + f''_{13} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial y} \right) + \\ &+ y \left(f''_{21} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + f''_{22} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} + f''_{23} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial y} \right) + f'_2 + \\ &+ yz \left(f''_{31} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + f''_{32} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} + f''_{33} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial y} \right) + f'_3 \cdot z = \\ &= f''_{12} \cdot x + f''_{13} \cdot xz + y(f''_{22} \cdot x + f''_{23} \cdot xz) + f'_2 + yz(f''_{32} \cdot x + f''_{33} \cdot xz) + f'_3 \cdot z = \\ &= xy \cdot f''_{22} + xyz^2 f''_{33} + x \cdot f''_{12} + xz \cdot f''_{13} + 2xyz \cdot f''_{23} + f'_2 + z \cdot f'_3.\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (f'_1 + f'_2 \cdot y + f'_3 \cdot yz) = \\
 &= \left(f''_{11} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial z} + f''_{12} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial z} + f''_{13} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial z} \right) + y \left(f''_{21} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial z} + f''_{22} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial z} + f''_{23} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial z} \right) + \\
 &\quad + yz \left(f''_{31} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial z} + f''_{32} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial z} + f''_{33} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial z} \right) + f'_3 \cdot y = \\
 &= f''_{13} \cdot xy + y(f''_{23} \cdot xy) + yz(f''_{33} \cdot xy) + f'_3 \cdot y = \\
 &= xy \cdot f''_{13} + xy^2 \cdot f''_{23} + xy^2 z \cdot f''_{33} + y \cdot f'_3.
 \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (f'_2 \cdot x + f'_3 \cdot xz) = x \left(f''_{21} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial z} + f''_{22} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial z} + f''_{23} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial z} \right) + \\
 &\quad + xz \left(f''_{31} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial z} + f''_{32} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial z} + f''_{33} \cdot \frac{\partial t_3}{\partial z} \right) + f'_3 \cdot x = \\
 &= x(f''_{23} \cdot xy) + xz(f''_{33} \cdot xy) + f'_3 \cdot x = x^2 y \cdot f''_{23} + x^2 yz \cdot f''_{33} + x \cdot f'_3.
 \end{aligned}$$

276. Имеем

$$f'_x = f'_u u'_x = f'_u k_x, \quad f'_y = f'_u u'_y = f'_u k_y, \quad f'_z = f'_u u'_z = f'_u k_z,$$

тогда

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = f'_u \cdot (k_x dx + k_y dy + k_z dz) = f'_u \cdot \langle \vec{k}, \vec{dr} \rangle,$$

где $\vec{dr} = \{dx, dy, dz\}$.

277. Используя правило дифференцирования сложной функции, найдём частные производные сначала первого, а затем второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f' \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f' \cdot \frac{x}{r} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{x}{r} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{x'r - xr'}{r^2} \right) = f'' \cdot \frac{x^2}{r^2} + f' \cdot \frac{1}{r} - f' \cdot \frac{x^2}{r^3}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f'' \cdot \frac{y^2}{r^2} + f' \cdot \frac{1}{r} - f' \cdot \frac{y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f'' \cdot \frac{z^2}{r^2} + f' \cdot \frac{1}{r} - f' \cdot \frac{z^2}{r^3}.$$

Тогда

$$\Delta u = f'' \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + \frac{3}{r} \cdot f' - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \cdot f' = f'' + \frac{3}{r} \cdot f' - \frac{1}{r} \cdot f' = f'' + \frac{2}{r} \cdot f' = F(r).$$

278. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{f^2} f' \cdot 2x = -\frac{2xyf'}{f^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f - yf' \cdot (-2y)}{f^2},$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{y}{f^2} f' \cdot 2x \right) + \frac{1}{y} \cdot \frac{f - yf' \cdot (-2y)}{f^2} = \\ &= -\frac{2yf'}{f^2} + \frac{1}{yf} + \frac{2yf'}{f^2} = \frac{1}{yf} = \frac{z}{y^2}. \end{aligned}$$

279. Найдём частные производные по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin \varphi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} \cdot r \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot r \cos \varphi,$$

откуда $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos \varphi$. Возводя в квадрат (1) и последнее равенство и почленно складывая их, получаем доказываемый результат.

280. Запишем функцию в виде $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = \frac{x}{y}$, $\eta = x^2 + y - z^2$. Тогда

$$u'_x = f'_\xi \xi'_x + f'_\eta \eta'_x = f'_\xi \cdot \frac{1}{y} + f'_\eta \cdot 2x,$$

$$u'_y = f'_\xi \xi'_y + f'_\eta \eta'_y = f'_\xi \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) + f'_\eta, \quad u'_z = f'_\xi \xi'_z + f'_\eta \eta'_z = f'_\eta (-2z).$$

Подставляя эти соотношения в уравнение, убеждаемся в том, что оно превращается в верное тождество:

$$\frac{2xz}{y} f'_\xi + 4x^2 z f'_\eta - \frac{2xz}{y} f'_\xi + 2yz f'_\eta - 4x^2 z f'_\eta - 2yz f'_\eta = 0.$$

281. Дифференцируя функцию по x и по y , имеем

$$z'_x = f'_u u'_x = f'_u (ye^{x^2-y^2} + xye^{x^2-y^2} \cdot 2x) = f'_u ye^{x^2-y^2} (1 + 2x^2),$$

$$z'_y = f'_u u'_y = f'_u (xe^{x^2-y^2} + xy e^{x^2-y^2} \cdot (-2y)) = f'_u x e^{x^2-y^2} (1 - 2y^2).$$

Исключая отсюда f'_u , находим

$$f'_u = \frac{z'_x}{ye^{x^2-y^2}(1+2x^2)} = \frac{z'_y}{xe^{x^2-y^2}(1-2y^2)},$$

или

$$x(1-2y^2)z'_x = y(1+2x^2)z'_y.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$x(2y^2-1)\frac{\partial z}{\partial x} + y(2x^2+1)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

282. 1-й способ. Для 1-го дифференциала: $du = u'_v dv = (e^v + 3)v'_s ds$. Для 2-го дифференциала:

$$\begin{aligned} d^2u &= u''_{vv} dv^2 + u'_v \cdot d^2v = e^v dv^2 + (e^v + 3)d^2v = e^v (v'_s ds)^2 + (e^v + 3)v''_{ss} ds^2 = \\ &= (e^v (v'_s)^2 + (e^v + 3)v''_{ss}) ds^2. \end{aligned}$$

2-й способ. Имеем $u = e^{v(s)} + 3v(s)$, поэтому $du = u'_s ds = (e^{v(s)}v'(s) + 3v'(s))ds$; $d^2u = (e^{v(s)}(v'(s))^2 + e^{v(s)}v''(s) + 3v''(s))ds^2$.

283. Обозначим $t_1 = x - y^2$, $t_2 = x^2 + y^3$.

1-й способ. По правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x} = f'_1 \cdot 1 + f'_2 \cdot 2x = f'_1 + 2x \cdot f'_2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} = f'_1 \cdot (-2y) + f'_2 \cdot (3y^2) = -2y \cdot f'_1 + 3y^2 \cdot f'_2;$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = (f'_1 + 2x f'_2) dx + (-2y f'_1 + 3y^2 f'_2) dy.$$

2-й способ. Имеем $du = \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2$, где

$$dt_1 = d(x - y^2) = dx - 2y dy, \quad dt_2 = d(x^2 + y^3) = 2x dx + 3y^2 dy.$$

Подставляя, получим $du = f'_1(dx - 2y dy) + f'_2(2x dx + 3y^2 dy)$. Осталось привести выражение к стандартному виду: $du = (f'_1 + 2x f'_2) dx + (-2y f'_1 + 3y^2 f'_2) dy$.

284. 1-й способ. Дифференцируя как сложную функцию, имеем

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \ln v \cdot y + \frac{u}{v} \cdot 2x = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \ln v \cdot x + \frac{u}{v} \cdot 2y = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}.$$

2-й способ. Эти частные производные можно вычислить иначе. Учитывая свойство инвариантности формы первого дифференциала, имеем $df = f'_u du + f'_v dv = \ln v du + \frac{u}{v} dv$. Подставляя сюда $du = ydx + xdy$, $dv = 2xdx + 2ydy$, и записывая результат в виде $df = f'_x dx + f'_y dy$, находим f'_x и f'_y как соответствующие коэффициенты при dx и dy .

285. Положим $t_1 = x + y$, $t_2 = y - z$. Продифференцируем исходное уравнение:

$$du = f'_{t_1} dt_1 + f'_{t_2} dt_2 = f'_1(dx + dy) + f'_2(dy - dz).$$

Приведя дифференциал к стандартному виду, получим

$$du = f'_1 dx + (f'_1 + f'_2) dy - f'_2 dz,$$

где частные производные берутся в точке $(x + y, y - z)$.

286. Обозначим аргументы этой сложной функции f через $t_1 = \frac{x}{y}$ и $t_2 = \frac{y}{z}$.

1) Найдём du .

1-й способ (через промежуточные переменные t_1 и t_2):

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2 = f'_1 \cdot \frac{ydx - xdy}{y^2} + f'_2 \cdot \frac{zdy - ydz}{z^2} = \\ &= \left(\frac{1}{y} f'_1 \right) dx + \left(-\frac{x}{y^2} f'_1 + \frac{1}{z} f'_2 \right) dy + \left(-\frac{y}{z^2} f'_2 \right) dz. \end{aligned}$$

2-й способ (через окончательные переменные x , y и z):

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x} \right) dx + \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial z} \right) dz = \\ &= \left(f'_1 \cdot \frac{1}{y} + f'_2 \cdot 0 \right) dx + \left(f'_1 \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) + f'_2 \cdot \frac{1}{z} \right) dy + \left(f'_1 \cdot 0 + f'_2 \cdot \left(-\frac{y}{z^2} \right) \right) dz = \\ &= f'_1 \cdot \frac{ydx - xdy}{y^2} + f'_2 \cdot \frac{zdy - ydz}{z^2}. \end{aligned}$$

2) Найдём $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Поскольку $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} f'_1$, то, дифференцируя второй раз по y , получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f'_1}{y} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(f'_1) \cdot y - f'_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y)}{y^2} =$$

$$= \frac{1}{y} \left(f''_{11} \frac{\partial t_1}{\partial y} + f''_{12} \frac{\partial t_2}{\partial y} \right) - \frac{1}{y^2} f'_1 = -\frac{x}{y^3} f''_{11} + \frac{1}{yz} f''_{12} - \frac{1}{y^2} f'_1.$$

287. 1) *1-й способ* (через промежуточные переменные t_1 и t_2). Воспользуемся формулой

$$d^2u = f''_{11} dt_1^2 + 2f''_{12} dt_1 dt_2 + f''_{22} dt_2^2 + f'_1 d^2t_1 + f'_2 d^2t_2,$$

где $t_1 = \frac{x}{y}$, $t_2 = \frac{y}{z}$. Вычислим

$$dt_1 = \frac{\partial t_1}{\partial x} dx + \frac{\partial t_1}{\partial y} dy + \frac{\partial t_1}{\partial z} dz = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy,$$

$$dt_2 = \frac{\partial t_2}{\partial x} dx + \frac{\partial t_2}{\partial y} dy + \frac{\partial t_2}{\partial z} dz = \frac{1}{z} dy - \frac{y}{z^2} dz.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d^2t_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 \cdot t_1 = \\ &= \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 t_1}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 t_1}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 t_1}{\partial y \partial z} dy dz = \\ &= \frac{2x}{y^3} dy^2 - \frac{2}{y^2} dx dy; \\ d^2t_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 \cdot t_2 = \\ &= \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 t_2}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 t_2}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial y \partial z} dy dz = \\ &= \frac{2y}{z^3} dz^2 - \frac{2}{z^2} dy dz. \end{aligned}$$

Найдём теперь второй дифференциал сложной функции:

$$\begin{aligned} d^2u &= f''_{11} dt_1^2 + 2f''_{12} dt_1 dt_2 + f''_{22} dt_2^2 + f'_1 d^2t_1 + f'_2 d^2t_2 = \\ &= f''_{11} \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy \right)^2 + f''_{22} \left(\frac{1}{z} dy - \frac{y}{z^2} dz \right)^2 + 2f''_{12} \cdot \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy \right) \cdot \left(\frac{1}{z} dy - \frac{y}{z^2} dz \right) + \\ &\quad + f'_1 \left(\frac{2x}{y^3} dy^2 - \frac{2}{y^2} dx dy \right) + f'_2 \left(\frac{2y}{z^3} dz^2 - \frac{2}{z^2} dy dz \right). \end{aligned}$$

2-й способ (через окончательные переменные x , y и z). Воспользуемся формулой

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz.$$

Далее надо вычислить все частные производные второго порядка (аналогично тому как это делалось в предыдущей задаче на примере частной производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$) и подставить в данную формулу. Однако на практике этот способ оказывается более громоздким.

288. Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{3}{3x+5y} \cdot (-\sin t) + \frac{5}{3x+5y} \cdot \cos t = \\ &= \frac{5 \cos t - 3 \sin t}{3x+5y} = \frac{5 \cos t - 3 \sin t}{3 \cos t + 5 \sin t}.\end{aligned}$$

289. Полная производная $\frac{dz}{dx}$ (при $y \neq 0$) вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{2x(1+x)e^{(1+x)^2}}{x^2+y^2}.$$

290. Найдём первую производную z по t :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 3x^2 \cdot \cos t + 6y \cdot e^t.$$

Продифференцируем ещё раз по переменной t :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z}{dt^2} &= (3x^2 \cdot \cos t + 6y \cdot e^t)'_t = 6x \cdot x'_t \cdot \cos t + 3x^2 \cdot (-\sin t) + 6y'_t \cdot e^t + 6y \cdot e^t = \\ &= 6 \sin t \cdot (\cos t) \cdot \cos t + 3(\sin t)^2 \cdot (-\sin t) + 6e^t \cdot e^t + 6e^t \cdot e^t = \\ &= 6 \sin t \cdot \cos^2 t - 3 \sin^3 t + 12e^{2t}.\end{aligned}$$

291. Обозначим аргумент этой сложной функции f через t , т. е. $t = x^2 - y^2 + z^2$. Тогда

$$df = f' dt, \quad d^2 f = f'' dt^2 + f' d^2 t.$$

Найдём $dt = t'_x dx + t'_y dy + t'_z dz = 2x dx - 2y dy + 2z dz$,

$$\begin{aligned}d^2 t &= t''_{xx} dx^2 + t''_{yy} dy^2 + t''_{zz} dz^2 + 2t''_{xy} dx dy + 2t''_{xz} dx dz + 2t''_{yz} dy dz \\ &= 2dx^2 - 2dy^2 + 2dz^2 + 0 \cdot dx dy + 0 \cdot dx dz + 0 \cdot dy dz.\end{aligned}$$

Итак, $df = 2f' \cdot (x dx - y dy + z dz)$,

$$d^2 f = f'' \cdot (2x dx - 2y dy + 2z dz)^2 + 2f' \cdot (dx^2 - dy^2 + dz^2),$$

где производные берутся в точке $t = x^2 - y^2 + z^2$.

292. Обозначим аргумент этой сложной функции f через t , т. е. $t = xyz + x - y + z$. Тогда

$$df = f' dt, \quad d^2 f = f'' dt^2 + f' d^2 t.$$

Найдём $dt = d(xyz + x - y + z) = yzdx + xzdy + xydz + dx - dy + dz = (yz + 1)dx + (xz - 1)dy + (xy + 1)dz$,

$$\begin{aligned} d^2 t &= t''_{xx} dx^2 + t''_{yy} dy^2 + t''_{zz} dz^2 + 2t''_{xy} dx dy + 2t''_{xz} dx dz + 2t''_{yz} dy dz = \\ &= 0 \cdot dx^2 + 0 \cdot dy^2 + 0 \cdot dz^2 + 2z dx dy + 2y dx dz + 2x dy dz. \end{aligned}$$

Итак, $df = f' \cdot ((yz + 1)dx + (xz - 1)dy + (xy + 1)dz)$,

$$\begin{aligned} d^2 f &= f'' \cdot ((yz + 1)dx + (xz - 1)dy + (xy + 1)dz)^2 + \\ &+ 2f' \cdot (z dx dy + y dx dz + x dy dz), \end{aligned}$$

где производные берутся в точке $t = xyz + x - y + z$.

293. Обозначим аргумент этой сложной функции f через t , т. е. $t = xy - zx - 2yz$. Тогда

$$df = f' dt, \quad d^2 f = f'' dt^2 + f' d^2 t.$$

Найдём $dt = t'_x dx + t'_y dy + t'_z dz = (y - z)dx + (x - 2z)dy - (x + 2y)dz$,

$$\begin{aligned} d^2 t &= t''_{xx} dx^2 + t''_{yy} dy^2 + t''_{zz} dz^2 + 2t''_{xy} dx dy + 2t''_{xz} dx dz + 2t''_{yz} dy dz = \\ &= 0 \cdot dx^2 + 0 \cdot dy^2 + 0 \cdot dz^2 + 2 dx dy - 2 dx dz - 4 dy dz. \end{aligned}$$

Итак, $df = f' \cdot ((y - z)dx + (x - 2z)dy - (x + 2y)dz)$,

$$d^2 f = f'' \cdot ((y - z)dx + (x - 2z)dy - (x + 2y)dz)^2 + 2f' \cdot (dx dy - dx dz - 2 dy dz),$$

где производные берутся в точке $t = xy - zx - 2yz$.

294. Обозначим промежуточные переменные $t_1 = x$, $t_2 = \frac{x}{y}$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{1}{y} = \\ &= f'_1 \left(x, \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{y} \cdot f'_2 \left(x, \frac{x}{y} \right) = (\text{кратко}) = f'_1 + \frac{1}{y} \cdot f'_2. \end{aligned}$$

Аналогично для частной производной по y имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot 0 + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2} \cdot f'_2.$$

Найдём частные производные 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(f'_1 + \frac{1}{y} \cdot f'_2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} (f'_1) + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (f'_2) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x} + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x} \right) = \\ &= f''_{11} \cdot 1 + f''_{12} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \left(f''_{21} \cdot 1 + f''_{22} \cdot \frac{1}{y} \right) = \end{aligned}$$

(так как функция дважды дифференцируема, то $f''_{12} = f''_{21}$)

$$= f''_{11} + \frac{2}{y} f''_{12} + \frac{1}{y^2} f''_{22},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{y^2} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t_2} - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t_2} \right) = \\ &= \frac{2x}{y^3} \cdot \frac{\partial u}{\partial t_2} - \frac{x}{y^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{2x}{y^3} \cdot f'_2 - \frac{x}{y^2} \cdot \left(f''_{21} \cdot 0 + f''_{22} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \right) = \frac{2x}{y^3} \cdot f'_2 + \frac{x^2}{y^4} \cdot f''_{22}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} + \left(-\frac{1}{y^2} \right) \frac{\partial u}{\partial t_2} + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \frac{\partial t_2}{\partial y} \right) = \\ &= f''_{11} \cdot 0 + f''_{12} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \left(-\frac{1}{y^2}\right) f'_2 + \frac{1}{y} \left(f''_{21} \cdot 0 + f''_{22} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \right) = \\ &= -\frac{x}{y^2} f''_{12} \left(x, \frac{x}{y} \right) - \frac{1}{y^2} f'_2 \left(x, \frac{x}{y} \right) - \frac{x}{y^3} f''_{22} \left(x, \frac{x}{y} \right) = \\ &= (\text{кратко}) = -\frac{x}{y^2} f''_{12} - \frac{1}{y^2} f'_2 - \frac{x}{y^3} f''_{22}. \end{aligned}$$

295. По формулам для дифференциалов 1-го и 2-го порядков сложной функции имеем:

$$df = f'_\xi d\xi + f'_\eta d\eta, \quad d^2 f = f''_{\xi\xi} d\xi^2 + 2f''_{\xi\eta} d\xi d\eta + f''_{\eta\eta} d\eta^2 + f'_\xi d^2 \xi + f'_\eta d^2 \eta,$$

где $d\xi = -\sin(x+y)dx - \sin(x+y)dy$, $d\eta = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$,

$$d^2\xi = \xi''_{xx}dx^2 + 2\xi''_{xy}dxdy + \xi''_{yy}dy^2 = -\cos(x+y)(dx+dy)^2,$$

$$d^2\eta = \eta''_{xx}dx^2 + 2\eta''_{xy}dxdy + \eta''_{yy}dy^2 = e^{xy}(y^2dx^2 + 2(1+xy)dxdy + x^2dy^2).$$

296. По формулам для дифференциалов 1-го и 2-го порядков сложной функции имеем:

$$df = f'_\xi d\xi + f'_\eta d\eta,$$

$$d^2f = f''_{\xi\xi}d\xi^2 + 2f''_{\xi\eta}d\xi d\eta + f''_{\eta\eta}d\eta^2 + f'_\xi d^2\xi + f'_\eta d^2\eta,$$

где $d\xi = -y\sin(xy)dx - x\sin(xy)dy$, $d\eta = e^{x+y}(dx+dy)$,

$$\begin{aligned} d^2\xi &= \xi''_{xx}dx^2 + 2\xi''_{xy}dxdy + \xi''_{yy}dy^2 = \\ &= -y^2\cos(xy)dx^2 - 2(xy\cos(xy) + \sin(xy))dxdy - x^2\cos(xy)dy^2, \\ d^2\eta &= \eta''_{xx}dx^2 + 2\eta''_{xy}dxdy + \eta''_{yy}dy^2 = e^{x+y}(dx+dy)^2. \end{aligned}$$

297. Обозначив $t_1 = x^2$, $t_2 = x - 2y$, имеем

$$d^2V = \frac{\partial^2 V}{\partial t_1^2}dt_1^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial t_1\partial t_2}dt_1dt_2 + \frac{\partial^2 V}{\partial t_2^2}dt_2^2 + \frac{\partial V}{\partial t_1} \cdot d^2t_1 + \frac{\partial V}{\partial t_2} \cdot d^2t_2,$$

где $dt_1 = 2xdx$, $dt_2 = dx - 2dy$, $d^2t_1 = 2dx^2$, $d^2t_2 = 0$. Тогда окончательно получим

$$\begin{aligned} d^2V &= V''_{11} \cdot 4x^2dx^2 + 2V''_{12} \cdot 2xdx(dx - 2dy) + V''_{22}(dx - 2dy)^2 + V'_1 \cdot 2dx^2 = \\ &= (4x^2V''_{11} + 4xV''_{12} + V''_{22} + 2V'_1)dx^2 - 2(4xV''_{12} + 2V''_{22})dxdy + 4V''_{22}dy^2. \end{aligned}$$

Тогда $\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} = -4xV''_{12} - 2V''_{22}$.

298. Обозначим промежуточные переменные $t_1 = x + y + z$, $t_2 = x^2 + y^2 + z^2$. По формулам для дифференциалов 1-го и 2-го порядков сложной функции имеем:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2}dt_2 = f'_1 \cdot (dx + dy + dz) + 2f'_2 \cdot (xdx + ydy + zdz),$$

$$\begin{aligned} d^2u &= \left(\frac{\partial}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial}{\partial t_2}dt_2 \right)^2 \cdot u + \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot d^2t_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot d^2t_2 = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}dt_1^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}dt_1dt_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}dt_2^2 + \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot d^2t_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot d^2t_2, \end{aligned}$$

где $dt_1 = dx + dy + dz$, $dt_2 = 2(xdx + ydy + zdz)$,

$$\begin{aligned} d^2t_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz \right)^2 \cdot t_1 = \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 t_1}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 t_1}{\partial z^2}dz^2 + \\ &\quad + 2\frac{\partial^2 t_1}{\partial x\partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 t_1}{\partial y\partial z}dydz + 2\frac{\partial^2 t_1}{\partial x\partial z}dxdz = \\ &= 0 \cdot dx^2 + 0 \cdot dy^2 + 0 \cdot dz^2 + 2 \cdot 0 \cdot dxdy + 2 \cdot 0 \cdot dydz + 2 \cdot 0 \cdot dxdz = 0, \\ d^2t_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz \right)^2 \cdot t_2 = \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 t_2}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 t_2}{\partial z^2}dz^2 + \\ &\quad + 2\frac{\partial^2 t_2}{\partial x\partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 t_2}{\partial y\partial z}dydz + 2\frac{\partial^2 t_2}{\partial x\partial z}dxdz = \\ &= 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 2 \cdot 0 \cdot dxdy + 2 \cdot 0 \cdot dydz + 2 \cdot 0 \cdot dxdz = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \end{aligned}$$

Итак, для 2-го дифференциала окончательно имеем

$$\begin{aligned} d^2u &= f''_{11} \cdot (dx + dy + dz)^2 + 4f''_{12} \cdot (dx + dy + dz)(xdx + ydy + zdz) + \\ &\quad + 4f''_{22} \cdot (xdx + ydy + zdz)^2 + 2f'_2 \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2), \end{aligned}$$

где все частные производные берутся в точке $(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$.

299. Обозначим аргументы функции через $t_1 = x + y + z$, $t_2 = z - 1$. 1) Дифференцируя последовательно, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot 0 = u'_1, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= u''_{11} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial z} + u''_{12} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial z} = u''_{11} + u''_{12}, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} &= \left(u'''_{111} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + u'''_{112} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x} \right) + \left(u'''_{121} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + u'''_{122} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x} \right) = u'''_{111} + u'''_{121}. \end{aligned}$$

2) Так как t_1 и t_2 зависят от своих аргументов линейно, то для второго дифференциала справедлива формула

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} dt_1^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} dt_1 dt_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} dt_2^2 = \\ &= u''_{11}(dx + dy + dz)^2 + 2u''_{12}(dx + dy + dz)dz + u''_{22}dz^2. \end{aligned}$$

Можно было привести это выражение к стандартному виду:

$$d^2u = u''_{11}dx^2 + u''_{11}dy^2 + (u''_{11} + u''_{22} + 2u''_{12})dz^2 +$$

$$+2u''_{11}dxdy + (2u''_{11} + 2u''_{12})dydz + (2u''_{11} + 2u''_{12})dxdz.$$

300. 1-й способ. Найдём частные производные, а затем дифференциал:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + f'_2 \cdot \frac{1}{y} + f'_3 \cdot \frac{y}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f'_2 \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + f'_3 \cdot \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = f'_3 \cdot \left(-\frac{xy}{z^2}\right).$$

Тогда $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$

2-й способ. Найдём сначала дифференциал, а уже по нему – частные производные:

$$\begin{aligned} du &= f'_1 \cdot dx + f'_2 \cdot d\left(\frac{x}{y}\right) + f'_3 \cdot d\left(\frac{xy}{z}\right) = \\ &= f'_1 \cdot dx + f'_2 \cdot \frac{ydx - xdy}{y^2} + f'_3 \cdot \frac{zydx + zxdy - xydz}{z^2} = \\ &= \left(f'_1 + \frac{1}{y} \cdot f'_2 + \frac{y}{z} \cdot f'_3\right) dx + \left(-\frac{x}{y^2} \cdot f'_2 + \frac{x}{z} \cdot f'_3\right) dy - \frac{xy}{z^2} \cdot f'_3 dz. \end{aligned}$$

Искомые производные есть коэффициенты при dx , dy , dz .

301. Выразим d^2f через промежуточные переменные:

$$\begin{aligned} d^2f &= \left(du \frac{\partial}{\partial u} + dv \frac{\partial}{\partial v} + dw \frac{\partial}{\partial w}\right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial u} d^2u + \frac{\partial f}{\partial v} d^2v + \frac{\partial f}{\partial w} d^2w = \\ &= f''_{11} du^2 + f''_{22} dv^2 + f''_{33} dw^2 + 2f''_{12} dudv + 2f''_{13} dudw + 2f''_{23} dvdw + \\ &\quad + f'_1 d^2u + f'_2 d^2v + f'_3 d^2w. \end{aligned}$$

Найдём дифференциалы промежуточных переменных:

$$du = ydx + xdy, \quad dv = dx - dy, \quad dw = dx + dy,$$

$$d^2u = d(du) = 2dxdy, \quad d^2v = 0, \quad d^2w = 0.$$

Подставляя в выражение для второго дифференциала и приводя к стандартному виду, имеем

$$\begin{aligned} d^2f &= (f''_{11}y^2 + f''_{22} + f''_{33} + 2f''_{12}y + 2f''_{13}y + 2f''_{23})dx^2 + \\ &+ 2(f''_{11}xy - f''_{22} + f''_{33} + f''_{12}(x - y) + f''_{13}(x + y) + f'_1)dxdy + \\ &+ (f''_{11}x^2 + f''_{22} + f''_{33} - 2f''_{12}x + 2f''_{13}x - 2f''_{23})dy^2. \end{aligned}$$

302. Обозначим $t = f(x + y^2, x)$, $\tau = y$, а также $p = x + y^2$, $\rho = y$. Тогда, т. к. $u = f(t, \tau)$, по правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \right),$$

поскольку $t = f(p, \rho)$ и, значит,

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial \rho}.$$

Теперь найдём искомую частную производную 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) = \\ &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} \right] \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right] = \\ &(\text{поскольку } \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot 2y) \\ &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \cdot 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \tau} \right] \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \cdot 2y + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial p} \cdot 2y \right] \\ &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \cdot 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \tau} \right] \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot 2y \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial p} \right], \end{aligned}$$

где частные производные $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \tau}$ берутся в точке $(f(x + y^2, x), y)$, а частные производные $\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial p}$ — в точке $(x + y^2, x)$.

303. Найдём явный вид функции: $f(f(t)) = \frac{1}{1-t}$, тогда $f(f(f(t))) = t$. Тогда $z = 2x + y$ ($2x + y \neq 0, 2x + y \neq 1$) и, следовательно, $dz = 2dx + dy$.

6 СЕМИНАР: Производная в заданном направлении, градиент. Касательные и нормали к кривым линиям и поверхностям

*«Книга высшей математики начинается словами:
«Мы знаем...».*

Илья Ильф (1897–1937) — русский советский писатель, драматург и сценарист, фотограф, журналист. В соавторстве с Евгением Петровым написал романы «Двенадцать стульев» и «Золотой телёнок».

**С целью защиты авторских прав
НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!**

6.1 Производная в заданном направлении: физический и геометрический смыслы, связь с дифференцируемостью

Мы знаем, что наличие более одной переменной в аргументе функции обобщает и, зачастую, усложняет многие понятия. В случае с дифференцируемостью это приводит, в частности, к тому, что возникает новое (в сравнении с функциями одной переменной) понятие – дифференцирование в любом направлении.

Вспомним, что производная f' функции $y = f(x)$ одной переменной показывает, как в точке x изменяется значение функции при бесконечно малом изменении аргумента вдоль оси Ox (мгновенная скорость). Если мы попытаемся по аналогии определить производную функции многих переменных в точке $(x_1^0, \dots, x_m^0)$, то столкнёмся с трудностью: в этом случае изменение аргумента в данной точке может происходить в разных направлениях, выходящих из этой точки, и этих направлений бесконечно много, и при этом будут получаться разные значения производной. И действительно, для функций нескольких переменных во многих физических приложениях интерес представляет скорость изменения функции по произвольным направлениям, проходящим через точку, не обязательно совпадающим с направлениями координатных осей. Именно это соображение и приводит к следующему определению производной по направлению.

Понятие производной в заданном направлении. Рассмотрим функцию $u = f(x_1, \dots, x_m)$ от m переменных (аргументов), определённую в окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$. Для любого единичного вектора $\vec{e} = \{e_1, \dots, e_m\}$ определим производную функции f в точке x^0 по направлению $\vec{e}$.

Для этого возьмём на прямой, содержащей луч $\vec{e}$, произвольную точку M , отличную от точки M_0 , обозначив величину вектора $\overrightarrow{M_0M}$ через l .¹ Очевидно, что этот вектор имеет координаты $\overrightarrow{M_0M}\{l \cos \alpha_1, \dots, l \cos \alpha_m\}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – углы, образованные вектором $\vec{e}$ с положительными направлениями координатных осей, а $\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_m$ – координаты единичного вектора $\vec{e}$ (направляющие косинусы).

С другой стороны, если координаты точки M равны $(x_1, \dots, x_m)$, то вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $\{x_1 - x_1^\circ, \dots, x_m - x_m^\circ\}$. Сопоставляя полученные выражения для координат вектора $\overrightarrow{M_0M}$, приходим к равенствам

$$x_1 = x_1^\circ + l \cos \alpha_1, \dots, x_m = x_m^\circ + l \cos \alpha_m.$$

Это означает, что на прямой, проходящей через точку M_0 и определяемой единичным вектором $\vec{e}$, функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ представляет собой сложную функцию одной независимой переменной l :

$$u = f(x_1^\circ + l \cos \alpha_1, \dots, x_m^\circ + l \cos \alpha_m). \quad (1)$$

Опр. 1 (*производной в заданном направлении*). Производную этой сложной функции по переменной l , взятую в точке $l = 0$, назовём *производной* функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{e}$ и будем обозначать символом

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}^\circ + l \cdot \vec{e}) - f(\vec{x}^\circ)}{l}, \quad (2)$$

где $\vec{x}^\circ$ – радиус-вектор точки M_0 , $l \in \mathbb{R}$ (если этот предел существует).¹

Если при этом функция f дифференцируема в точке M_0 , то, дифференцируя функцию (1) (как сложную функцию) по переменной l , получаем формулу для вычисления производной в направлении вектора $\vec{e} = \{\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_m\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) \cdot \cos \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0) \cdot \cos \alpha_m. \quad (3)$$

Замечание. Если вектор $\vec{e}$, задающий направление, оказывается сонаправлен с какой-либо координатной осью, то производная по этому направлению совпадает с частной производной по выбранной координате.

¹ Величиной l направленного отрезка $\overrightarrow{M_0M}$ называется число, равное длине отрезка M_0M , взятой со знаком «плюс», если векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{e}$ направлены в одну сторону, и со знаком «минус», если эти векторы противоположно направлены.

¹ Иногда, например в [5], можно встретить более общее определение производной в заданном направлении, в котором $l \rightarrow +0$ в пределе (2).

Пример 114. В случае функции трёх переменных, если единичный вектор $\vec{e}$, задающий направление дифференцирования, совпадает с вектором (ортом) $\vec{i} = \{1, 0, 0\}$, направленным вдоль оси Ox , то $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ превращается в обычную частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$. Если вектор $\vec{e}$ совпадает с вектором $\vec{j} = \{0, 1, 0\}$ (вдоль оси Oy), то производная в его направлении будет частной производной по переменной y : $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f}{\partial y}$. Аналогично, производная в направлении орта $\vec{k} = \{0, 0, 1\}$ есть частная производная $\frac{\partial f}{\partial z}$. $\square$

Можно сформулировать определение производной функции f в точке $(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$ пространства $\mathbb{R}^m$ в направлении вектора $\vec{e}$ иначе, соблюдая аналогию с определением производной функции одной переменной (т. е. как «предел отношения приращения функции к приращению аргумента»).

Опр. 2. Производной функции $f(M)$ по направлению $\vec{e}$ называется предел (если он существует)

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M}.$$

Здесь, по-прежнему, величина $M_0 M$ равна длине отрезка $|M_0 M|$, взятой со знаком плюс, если направление этого отрезка совпадает с направлением $\vec{e}$, и со знаком минус в противном случае.

Подчёркнём *физический смысл* этой производной: она характеризует мгновенную скорость изменения функции в точке M_0 в направлении $\vec{e}$. При этом абсолютная величина производной $\left| \frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} \right|$ определяет величину скорости, а знак производной – возрастание (при $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} > 0$) или убывание (при $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} < 0$) функции в направлении $\vec{e}$.

Геометрический смысл производной по направлению по существу напоминает геометрический смысл «обычной» производной. Рассмотрим его на примере функции двух переменных $z = f(x, y)$. Проведём через точку $M'_0(x_0, y_0)$ на плоскости Oxy прямую l и выберем на ней направление $\vec{e}$. Представим себе вертикальную плоскость, проходящую через прямую l (перпендикулярно плоскости Oxy). Данная плоскость «высекает» из поверхности $z = f(x, y)$ пространственную кривую L , которой, очевидно, принадлежит точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Производная по направлению численно равна тангенсу угла φ между касательной к кривой L в точке M_0 и плоскостью Oxy :

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \vec{e}} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Можно сказать, что φ – это угол между касательной к кривой L в точке M_0 и её ортогональной проекцией на плоскость Oxy .

Пример 115. Найти производную функции $u = xe^y + ye^x - z^2$ в точке $M_0(3, 0, 2)$ в направлении к точке $M_1(4, 1, 3)$. Возрастает или убывает функция в этом направлении?

Решение. Решим задачу двумя способами.

1-й способ. Вычислим производную, используя определение (2). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(M_0 + l \cdot \vec{e}) - f(M_0)}{l} = \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(3 + l \cos \alpha, 0 + l \cos \beta, 2 + l \cos \gamma) - f(3, 0, 2)}{l}. \end{aligned}$$

Найдём направляющие косинусы. Вектор $\overrightarrow{M_0 M} = \{1, 1, 1\}$, определяющий направление производной, имеет длину $|\overrightarrow{M_0 M}| = \sqrt{3}$. Найдём единичный вектор в его направлении, разделив этот вектор $\overrightarrow{M_0 M}$ на его длину (т. е. отнормировав его): $\frac{\overrightarrow{M_0 M}}{|\overrightarrow{M_0 M}|} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$. Полученные координаты единичного вектора и есть направляющие косинусы: $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда получим

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\left(3 + \frac{l}{\sqrt{3}}\right) e^{\frac{l}{\sqrt{3}}} + \frac{l}{\sqrt{3}} e^{3 + \frac{l}{\sqrt{3}}} - \left(2 + \frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2 - (3 \cdot e^0 + 0 \cdot e^3 - 2^2)}{l} =$$

(имеем неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$, применим правило Лопиталя)

$$\begin{aligned} &= \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{\frac{l}{\sqrt{3}}} + \left(3 + \frac{l}{\sqrt{3}}\right) \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{\frac{l}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{3 + \frac{l}{\sqrt{3}}} + \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot e^{3 + \frac{l}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2l}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^3 - \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{e^3}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2-й способ. Поскольку функция в условии задачи является дифференцируемой в точке M_0 , то можно воспользоваться формулой (3). Вычислим частные производные в точке M_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} &= (e^y + ye^x) \Big|_{M_0} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} = (xe^y + e^x) \Big|_{M_0} = 3 + e^3, \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} &= -2z \Big|_{M_0} = -4. \end{aligned}$$

Теперь по формуле (3) получим:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (3 + e^3) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{e^3}{\sqrt{3}}.$$

Результаты, как следовало ожидать, совпали, но второй способ на практике часто оказывается проще. Тот факт, что $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} > 0$, означает, что в точке M_0 в данном направлении функция возрастает. $\square$

Как связаны существование в точке производной по любому направлению и дифференцируемость функции в этой точке? Зададимся вопросом: гарантирует ли существование производной в точке по любому направлению дифференцируемость функции в этой точке, и наоборот? Достаточное условие существования производной по любому направлению на примере функции трёх переменных даёт следующая теорема.

Теорема 1 (*достаточное условие существования в точке производной в любом направлении*). Если функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то она имеет в этой точке производную по любому направлению $\vec{e}$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: функция может иметь в точке производные по всем направлениям, но не быть при этом дифференцируемой в этой точке.

Пример 116. Показать, что функция $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ имеет в точке $(0, 0)$ производную $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(0, 0)$ по всем направлениям, но не дифференцируема в этой точке.

Решение. В самом деле, найдём производную $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(0, 0)$ в направлении произвольного вектора $\vec{e} \in \{\cos \alpha, \cos \beta\}$, $|\vec{e}| = 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(0, 0) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(l \cos \alpha, l \cos \beta) - f(0, 0)}{l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(l \cos \alpha)^2 l \cos \beta} - 0}{l} = \sqrt[3]{\cos^2 \alpha \cos \beta}.$$

Очевидно, что данная производная существует при любых α и β . Недифференцируемость функции в точке $(0, 0)$ была доказана выше. $\square$

Теорема 2 (*достаточное условие дифференцируемости функции в точке*). Если функция $f(x, y, z)$ имеет в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ производные по любому направлению $\vec{e}$, непрерывные в самой точке M_0 , то она дифференцируема в этой точке.

Замечание 1. Как известно, это условие можно ослабить, потребовав в точке M_0 непрерывность лишь всех частных производных (т. е. вдоль координатных осей).

Замечание 2. Наличие у функции в точке производных по любому направлению не гарантирует не только дифференцируемости, но даже непрерывности функции в этой точке.

Замечание 3. Формула (2) для вычисления производной по направлению $\vec{e}$ в данной точке M_0 остаётся в силе и тогда, когда точка M стремится к точке M_0 по кривой, для которой вектор $\vec{e}$ является касательным в точке M_0 .

6.2 Градиент и его основные свойства. Арифметические операции с градиентами

«Выберите себе работу по душе, и вам не придётся работать ни одного дня в своей жизни».

Конфуций (6–5 вв. до н. э.) – древний мыслитель и философ Китая.

Для изучения вопроса о направлении быстрого возрастания дифференцируемой в точке M_0 функции $u = f(x, y, z)$ введём в рассмотрение понятие градиента.¹

Градиентом функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ называется вектор частных производных

$$\text{grad } f(M_0) = \left\{ \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_m} \right\}.$$

Пример 117. Для функции трёх переменных имеем:

$$\text{grad } f|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right\},$$

или

$$\text{grad } f(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cdot \vec{k}. \quad \square$$

Ясно, что если функция дифференцируема в точке M_0 , то у неё в этой точке существует градиент. Для обозначения градиента наряду с обозначением $\text{grad } u(x_0, y_0)$ также используется обозначение: $\nabla u(M_0)$, где символический вектор

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}$$

есть оператор Гамильтона, является дифференциальным векторным оператором, а символ ∇ читается как «набла».

Введение оператора ∇ даёт исключительно удобный инструмент для выполнения дифференциальных операций. Во-первых, он включает дифференцирование сразу по всем переменным, что ведёт не только к компактной записи формул, но позволяет мыслить укрупнёнными понятиями. Во-вторых, оператор ∇ не зависит от системы координат и, следовательно, с ним можно

¹Термин «градиент» впервые появился в метеорологии, а в математику был введён Джеймсом Максвеллом в 1873 г. Обозначение: $\text{grad } f$ тоже предложил Максвелл.

манипулировать как с вектором. Так, полученное выше выражение для производной по направлению можно переписать в виде скалярного произведения¹ градиента и единичного вектора, задающего направление дифференцирования:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M_0) = \langle \vec{e}, \text{grad } f(M_0) \rangle.$$

К слову, с помощью скалярного произведения первый дифференциал может быть представлен в виде $du(M_0) = \langle \text{grad } f(M_0), d\vec{x} \rangle$, где $d\vec{x} = \{dx_1, \dots, dx_m\}$.

В силу неравенства Коши–Буняковского $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$, которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, имеем:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M_0) \right| \leq |\vec{e}| \cdot |\text{grad } f(M_0)| = |\text{grad } f(M_0)|.$$

Отсюда приходим к **свойствам градиента**.

1) Своё максимальное значение производная по направлению принимает при дифференцировании в направлении градиента. То есть *градиент всегда указывает направление наибольшего возрастания функции в данной точке*. При этом наименьшее значение у производной достигается в направлении вектора антиградиента $\left(-\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M_0) \right)$.

2) Значение производной в направлении градиента равно модулю градиента $|\text{grad } u(M_0)|$.

3) *Геометрический смысл градиента*. По определению, поверхность, в точках которой функция f сохраняет постоянное значение $f(x_1, \dots, x_m) \equiv C$ ($C = \text{const}$ – любое число из области значений функции), называется *поверхностью уровня*. Поскольку в ортогональном направлении изменение функции всегда максимально, то градиент в каждой точке $M(x_1, \dots, x_m)$ (если он существует) всегда перпендикулярен (ортогонален) поверхности уровня, проходящей через точку $N(x_1, \dots, x_m, u(M))$. Иными словами, в любой точке градиент направлен по нормали к касательной плоскости.

4) Производную по направлению дифференцируемой функции можно рассматривать как *проекцию градиента* функции на это направление:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M_0) = \text{Pr}_{\vec{e}}(\text{grad } f(M_0)).$$

¹Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}\{a_1, \dots, a_m\}$ и $\vec{b}\{b_1, \dots, b_m\}$ называется число, равное произведению длин этих векторов $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_m^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + \dots + b_m^2}$ на косинус угла φ между ними. Обозначение: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$. Если координаты векторов известны, то скалярное произведение находится по формуле $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m$.

Пример 118. Найти: а) градиент функции

$$u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$$

в произвольной точке (x, y) , а также в точке $(1, 0)$;

б) производную этой функции вдоль единичного вектора, образующего с осью Ox угол $\alpha = 30^\circ$, а с осью Oy — угол $\beta = 60^\circ$.

Решение. а) Найдём частные производные сначала в произвольной точке (x, y) , а затем в точке $(1, 0)$:

$$u'_x = (4x^3 - 8xy^2)|_{(1,0)} = 4, \quad u'_y = (4y^3 - 8x^2y)|_{(1,0)} = 0.$$

Тогда градиент функции в точке (x, y) есть вектор

$$\text{grad } u(x, y) = \{4x^3 - 8xy^2, 4y^3 - 8x^2y\},$$

причём $\text{grad } u(1, 0) = \{4, 0\}$.

б) Воспользуемся формулой для вычисления производной в заданном направлении:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(1, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) \cos \beta = 4 \cdot \cos 30^\circ + 0 \cdot \cos 60^\circ = 2\sqrt{3}. \quad \square$$

Пример 119. Найти направление наибольшего изменения функции

$$u = xy + yz + xz$$

в точке $M_0(1, 1, 1)$, а также величину этого изменения в указанной точке.

Решение. Направление наибольшего изменения функции указывается вектором $\text{grad } f(M_0)$. Имеем

$$\text{grad } f(M) = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (y + x)\vec{k},$$

поэтому $\text{grad } f(M_0) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Этот вектор определяет направление наибольшего возрастания функции в точке $M_0(1, 1, 1)$. Величина наибольшего изменения функции в этой точке равна

$$\max_{\vec{e}} \frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = |\text{grad } f(M_0)| = 2\sqrt{3}. \quad \square$$

Арифметические операции с градиентами (правила вычисления).

Пусть $u(M)$ и $v(M)$ — дифференцируемые в точке M функции. Тогда:

1. $\text{grad } (Cf(M)) = C \cdot \text{grad } f(M)$, где C — постоянное число;
2. $\text{grad } (u \pm v) = \text{grad } u \pm \text{grad } v$ (градиент суммы/разности);
3. $\text{grad } (u \cdot v) = v \cdot \text{grad } u + u \cdot \text{grad } v$ (градиент произведения);
4. $\text{grad } \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \cdot \text{grad } u - u \cdot \text{grad } v}{v^2}$ ($v \neq 0$) (градиент частного);

5. *Градиент сложной функции.* Пусть $f(u)$ – дифференцируемая функция, где u – некоторая дифференцируемая функция. Тогда $\text{grad } f(u) = f'(u) \cdot \text{grad } u$, или $\nabla f(u) = f'(u) \nabla u$.

В случае сложной функции $f(u, v)$ имеем

$$\nabla f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \nabla u + \frac{\partial f}{\partial v} \nabla v.$$

Особые точки плоских кривых. Точка $M_0(x_0, y_0)$ плоской кривой $F(x, y) = 0$, в которой $F'_x(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) = 0$ (или хотя бы одна из этих частных производных не существует), называется *особой точкой* кривой. В общем случае под *особой точкой поверхности* понимают точку, в которой все частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует.

Пусть в особой точке M_0 производные второго порядка $f''_{xx} = A$, $f''_{xy} = B$, $f''_{yy} = C$ не все равны нулю и $\Delta = AC - B^2$, тогда:

- 1) если $\Delta > 0$, то M_0 – изолированная точка,
- 2) если $\Delta < 0$, то M_0 – узел (двойная точка),
- 3) если $\Delta = 0$, то M_0 – или точка возврата (первого или второго рода), или изолированная точка, или точка самоприкосновения.

Пример 120. Показать, что кривая $y^2 = ax^2 + x^3$ имеет:

- 1) узел, если $a > 0$;
- 2) изолированную точку, если $a < 0$;
- 2) точку возврата 1-го рода, если $a = 0$.

Решение. Здесь $F(x, y) = ax^2 + x^3 - y^2$. Найдём особые точки:

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = 2ax + 3x^2 = 0, \\ F'_y(x, y) = -2y = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $O(0, 0)$ и $N(-\frac{2}{3}a, 0)$, но координаты точки N не удовлетворяют уравнению данной кривой. Значит, имеется единственная особая точка $O(0, 0)$.

Найдём вторые производные и их значения в точке O :

$$f''_{xx}(x, y) = (2a + 6x) \Big|_O = 2a = A, \quad f''_{xy}(x, y) = 0 = B, \quad f''_{yy}(x, y) = -2 = C,$$

$$\Delta = AC - B^2 = -4a.$$

Следовательно,

- 1) если $a > 0$, то $\Delta < 0$ и точка O – узел;
- 2) если $a < 0$, то $\Delta > 0$ и точка O – изолированная точка;
- 3) если $a = 0$, то $\Delta = 0$. Уравнение кривой в этом случае будет $y^2 = x^3$, или $y = \pm\sqrt{x^3}$, где $x \geq 0$; кривая симметрична относительно оси Ox , являющейся касательной. Следовательно, точка O – точка возврата 1-го рода. $\square$

6.3 Элементы дифференциальной геометрии: касательные и нормали к кривым линиям и поверхностям

— Простите, а для чего нужна эта формула $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$?

— Для чего нужна? Ну, я бы сказал так.

Лично для меня ответ такой: для красоты.

Алексей Савватеев (род. 1973), современный учёный и популяризатор математики.

Дифференциальная геометрия кривых линий и поверхностей — раздел дифференциальной геометрии, который занимается исследованием гладких пространственных и плоских кривых, а также гладких поверхностей в евклидовом пространстве аналитическими методами. Рассмотрим основные случаи построения касательных и нормалей в прямоугольной системе координат.

6.3.1 Касательная и нормаль к плоской кривой

Пусть на плоскости имеется график некоторой непрерывной функции $y = f(x)$ (в общем случае, плоская кривая). Приведём определение касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, принадлежащей графику. Рассмотрим для этого произвольную точку $M(x, f(x))$ из окрестности точки M_0 . Прямая MM_0 является при этом *секущей* к графику функции.

Касательной прямой к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей MM_0 при стремлении M к M_0 по кривой, если это предельное положение существует. Для существования касательной в точке M_0 достаточно существования производной (конечной или бесконечной) у функции в точке x_0 . *Нормалью* (нормальной прямой) к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 называется прямая, перпендикулярная касательной в точке касания.

а) *Случай явного задания функции.* Пусть кривая на плоскости задана явным уравнением $y = y(x)$ и имеет производную в точке x_0 . Тогда в точке $(x_0, y(x_0))$ к графику кривой можно провести касательную, уравнение которой имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0), \quad (1)$$

где $y_0 = y(x_0)$. Угловым коэффициентом касательной равен производной в точке x_0 . Уравнение нормали ($y'(x_0) \neq 0$):

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0). \quad (2)$$

б) *Случай неявного задания кривой.* Пусть кривая $y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, где F — некоторая дифференцируемая функция, причём

$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Продифференцировав уравнение по переменной x , получим

$$F'_x + F'_y \cdot y'_x = 0, \quad \text{откуда} \quad y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Подставляя производную в (1) и (2), получаем уравнения касательной прямой¹

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

и нормали

$$F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

в) *Случай параметрического задания кривой.* Если кривая задана параметрически системой дифференцируемых функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, то угловой коэффициент касательной находится по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, поэтому (1) и (2) принимают вид:

уравнение касательной прямой²

$$y - y_0 = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}(x - x_0), \quad \text{или} \quad \frac{x - x_0}{x'_t(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'_t(t_0)},$$

и уравнение нормали

$$y - y_0 = -\frac{x'_t(t_0)}{y'_t(t_0)}(x - x_0), \quad \text{или} \quad \frac{x - x_0}{y'_t(t_0)} = \frac{y - y_0}{-x'_t(t_0)},$$

где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$.

6.3.2 Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой

«Большинство так называемых культурных людей, не связанных с математикой по роду своих занятий, считает совершенно допустимым не иметь об этой науке ни малейшего представления. Математика для них – нечто в высшей степени скучное, сухое и отвлечённое...

В наиболее печальных случаях считается, что это почти то же самое, что занятие бухгалтерией».

Норберт Винер (англ. Norbert Wiener; 1894–1964) – американский учёный, выдающийся математик и философ, основоположник кибернетики и теории искусственного интеллекта.

¹Частные производные $F'_x(x_0, y_0)$ и $F'_y(x_0, y_0)$ одновременно в нуль не обращаются, т. е. точка (x_0, y_0) не является особой.

²Производные $x'_t(t_0)$ и $y'_t(t_0)$ в точке (x_0, y_0) одновременно в нуль не обращаются.

Определение касательной прямой остаётся тем же, что и для плоской кривой, т. е. касательная определяется как предельное положение секущей. Приведём другое определение касательной прямой [5].

Опр. (*касательной прямой*). Пусть Γ – кривая в $\mathbb{R}^3$ и $M_0 \in \Gamma$. Прямая L , проходящая через точку M_0 , называется *касательной к кривой в точке M_0* , если для расстояния от точки $M \in \Gamma$ до прямой L имеем $\rho(M, L) = o(\|M - M_0\|)$ при $M \rightarrow M_0$.

Нормальной плоскостью к кривой Γ в точке $M_0 \in \Gamma$ называется плоскость, перпендикулярная касательной в точке касания.

Обратимся к основным способам задания кривых в пространстве и сформулируем достаточные условия существования касательной прямой в точке.

а) *Случай параметрического задания кривой*. Пусть кривая задана параметрически системой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ дифференцируемы в точке t_0 и $(x'_t(t_0))^2 + (y'_t(t_0))^2 + (z'_t(t_0))^2 \neq 0$.¹ Тогда в точке $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ существует касательная прямая, уравнения которой имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{x'_t(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'_t(t_0)}.$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$x'_t(t_0)(x - x_0) + y'_t(t_0)(y - y_0) + z'_t(t_0)(z - z_0) = 0.$$

б) *Случай неявного задания кривой*. Пусть кривая задана двумя неявными уравнениями

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

т. е. задана как пересечение двух поверхностей. Пусть функции F и G непрерывно дифференцируемы в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $(F'_x(M_0))^2 + (F'_y(M_0))^2 + (F'_z(M_0))^2 \neq 0$, $(G'_x(M_0))^2 + (G'_y(M_0))^2 + (G'_z(M_0))^2 \neq 0$. Тогда в точке M_0 существует касательная прямая, определяемая системой уравнений

$$\begin{cases} F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0, \\ G'_x(M_0)(x - x_0) + G'_y(M_0)(y - y_0) + G'_z(M_0)(z - z_0) = 0, \end{cases}$$

т. е. как пересечение двух плоскостей.

Уравнение нормальной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix} = 0.$$

¹Кривую можно задать векторным способом $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$, или $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки кривой.

6.3.3 Касательная плоскость и нормальная прямая к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в точке M_0 называется плоскость, проходящая через эту точку, если угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку M_0 и любую точку M поверхности, стремится к нулю, когда M стремится по поверхности к M_0 .

Приведём другое определение касательной плоскости [5].

Опр. (*касательной плоскости*). Пусть поверхность S задана в $\mathbb{R}^3$ непрерывной функцией $z = f(x, y)$ и пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Плоскость P , проходящая через точку M_0 , называется *касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0* , если для расстояния от точки $M \in S$ до плоскости P имеем $\rho(M, P) = o(\|M - M_0\|)$ при $M \rightarrow M_0$. Суть определения сохраняется и при других способах задания непрерывной поверхности.

Нормалью к S в точке M_0 называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости в точке касания.

Рассмотрим основные способы задания поверхностей и сформулируем условия существования касательных плоскостей к ним.

а) *Случай явного задания поверхности*. Пусть поверхность задана явным уравнением $z = f(x, y)$. Рассмотрим на ней точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Теорема (*необходимое и достаточное условие существования касательной плоскости*). Для того чтобы поверхность $z = f(x, y)$ имела в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, касательную плоскость, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ была дифференцируема в точке (x_0, y_0) .

Уравнение касательной плоскости в точке M_0 :

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0);$$

уравнение нормали в точке M_0 :

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Пример 121. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ в точке $A\left(2, -2, -\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Найдём частные производные

$$z'_x = \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{(2, -2)} = -\frac{1}{4}, \quad z'_y = -\frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{(2, -2)} = -\frac{1}{4}.$$

Тогда уравнение касательной плоскости в точке A имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad \Leftrightarrow$$

$$z + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{4}(y+2) \Leftrightarrow x + y + 4z + \pi = 0. \square$$

б) *Случай неявного задания поверхности.* Пусть поверхность S задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, причём $F \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^3$, $M_0 \in S$ и $(F'_x(M_0))^2 + (F'_y(M_0))^2 + (F'_z(M_0))^2 \neq 0$. Тогда в точке M_0 существует касательная плоскость к поверхности S , определяемая уравнением

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Уравнение нормали в точке M_0 :

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Замечание. Обозначим $\vec{r} = \{x, y, z\}$ – радиус-вектор произвольной точки касательной плоскости, $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ – радиус-вектор точки касания. Тогда для уравнения касательной плоскости в векторно-операторном виде получим

$$\nabla F(\vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0,$$

или, в развёрнутом покомпонентном виде,

$$F'_x(\vec{r}_0)(x - x_0) + F'_y(\vec{r}_0)(y - y_0) + F'_z(\vec{r}_0)(z - z_0) = 0.$$

в) *Случай параметрического задания поверхности.* Пусть поверхность S задана системой двухпараметрических уравнений

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

где функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v) \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(u_0, v_0) \in D$, $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$, причём векторы $(x'_u(M_0), y'_u(M_0), z'_u(M_0))$ и $(x'_v(M_0), y'_v(M_0), z'_v(M_0))$ неколлинеарны. Обозначим определители

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

где значения частных производных вычисляются в точке касания.

Тогда касательная плоскость к S в точке M_0 существует и определяется уравнением¹

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

уравнения (канонические) нормали:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

В полученном уравнении касательной плоскости предполагается, что хотя бы один из коэффициентов A, B, C при переменных отличен от нуля.

Рассмотрим примеры задания поверхностей в трёхмерном пространстве системой трёх уравнений с двумя параметрами.

Пример 122. Система уравнений

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v, \\ y = a \sin u \sin v, \\ z = a \cos u, \end{cases}$$

где $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$, определяет сферу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. $\square$

Пример 123. Система уравнений

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v, \\ y = b \sin u \sin v, \\ z = c \cos u, \end{cases}$$

задаёт эллипсоид $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$. $\square$

Пример 124. Система уравнений

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = \lambda u, \end{cases}$$

где $u \in \mathbb{R}$, $0 \leq v \leq 2\pi$, определяет коническую поверхность $\lambda^2(x^2 + y^2) = z^2$. $\square$

¹Уравнение касательной плоскости к S в точке M_0 можно также записать в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u(M_0) & y'_u(M_0) & z'_u(M_0) \\ x'_v(M_0) & y'_v(M_0) & z'_v(M_0) \end{vmatrix} = 0.$$

6.4 Задачи для самостоятельного решения

Задачи на вычисление производной в заданном направлении:

№304. Показать, что производные по любому направлению функции

$$z = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$$

в точке $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ равны нулю.

№305. Найти производную функции

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

в точке $(3, 1)$ по направлению, составляющему угол $\frac{\pi}{4}$ с осью Ox . Возрастает или убывает функция в этом направлении (в данной точке)?

№306. Найти производную функции

$$f(x, y) = \ln(x^2 + 2y^2)$$

в точке $(1, 2)$ по направлению, составляющему угол $\frac{\pi}{4}$ с осью Ox .

№307. [8, № 3341] Найти производную функции

$$f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$$

в точке $(1, 1)$ по направлению, составляющему угол $\frac{\pi}{3}$ с осью Ox .

№308. [8, № 3342] Найти производную функции

$$z = x^2 - xy + y^2$$

в точке $M(1, 1)$ в направлении $\vec{l}$, составляющем угол α с положительным направлением оси Ox . В каком направлении эта производная имеет: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение; в) равна 0?

№309. Найти единичный вектор $\vec{l}$, по направлению которого производная $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ в точке $M(-1, 2)$ достигает наибольшего значения, если

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2.$$

№310. [8, № 3345] Найти производную функции $u = xyz$ в точке $M(1, 1, 1)$ в направлении вектора $\vec{l}\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$. Чему равна величина градиента функции в этой точке?

№311. Найти производную функции $u = xy^2 + z^2 - xyz$ в точке $M_0(1, 2, 3)$ в направлении вектора $\vec{a}\{1, -2, 2\}$.

№312. Найти производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M_0(1, 1, 1)$ в направлении вектора $\vec{s} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

№313. Найти производную функции $u = xy^2z^3$ в точке $M(3, 2, 1)$ в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$, где $N(5, 4, 2)$.

№314. Найти производную функции $u = x^2y + 3yz^3 + 2xz$ в точке $P(1, -2, 3)$ в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$, где $M(1, -3, 2)$, $N(2, -1, 0)$.

№315. Привести пример функции $f(x, y)$, имеющей в точке $(0, 0)$ производную по любому направлению, но не являющуюся дифференцируемой в этой точке.

№316. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

разрывна в точке $(0, 0)$, но имеет производную в этой точке в направлении любого вектора.

№317. Найти все направления $\vec{l} \in \mathbb{R}^2$, по которым существует производная $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0, 0)$ функции

$$f(x, y) = \sqrt{|x^2 - 3y^2|}.$$

Дифференцируема ли эта функция в точке $(0, 0)$?

Задачи на вычисление, применение и свойства градиента:

№318. Доказать, что градиент скалярного поля перпендикулярен к поверхности уровня (или к линии уровня, если поле плоское).

№319. Доказать, что для дифференцируемых функций справедливо:

$$\text{grad}(u \cdot v) = v \cdot \text{grad } u + u \cdot \text{grad } v.$$

№320. Пусть $F(u)$ – дифференцируемая функция. Доказать, что

$$\text{grad } F(u) = F'(u) \cdot \text{grad } u.$$

№321. Найти производную функции $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $(0, e)$ в направлении её градиента в этой точке.

№322. Доказать, что для функций нескольких переменных своё наибольшее значение производная по направлению в заданной точке достигает в направлении градиента, а наименьшее – в направлении антиградиента.

№323. [8, № 3347] Определить угол между градиентами функции

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

в точках $A(\varepsilon, 0, 0)$ и $B(0, \varepsilon, 0)$.

№324. Найти производную функции

$$f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{xz}{y} + \ln(x^2 z^2 + y^2)$$

в точке $M_0(1, 1, -1)$ по направлению градиента функции $\varphi(x, y, z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$ в этой точке.

№325. [10, с. 48] Вычислить градиент функции

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{\exp(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Указание: воспользоваться операторным способом, применяя свойства оператора Гамильтона (правила вычисления градиента).

№326. [10, с. 49] Вычислить градиент функции

$$f(x, y, z) = xy \cdot \varphi(u, v),$$

где φ – дифференцируемая функция, $u = x^2 + z^2$, $v = y + z$.

Указание: воспользоваться операторным способом.

Построение касательных плоскостей и нормалей в случае явного задания поверхности:

№327. [8, № 3539] Написать уравнение касательной плоскости и нормали в точке $M_0(1, 2, 5)$ к поверхности $z = x^2 + y^2$ (*параболоид вращения*).

№328. Написать уравнение касательной плоскости и нормали в точке $M_0(2, 1, 3)$ к поверхности $z = x^2 - y^2$ (*гиперболический параболоид*).¹

№329. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ в точке $M(1, 1, 1)$.

№330. Построить касательную плоскость и нормаль в точке $(1; \pi; \frac{1}{e})$ к поверхности, заданной явно уравнением $z = e^{x \cos y}$.

№331. Построить касательную плоскость и нормаль в точке $(3; 1; \frac{1}{2})$ к поверхности, заданной явно уравнением $z = \cos \frac{\pi y}{x}$.

№332. Построить касательную плоскость и нормаль в точке $(1; 2; 1)$ к поверхности, заданной явно уравнением $z = \sin \frac{\pi x}{y}$.

№333. В какой точке касательная плоскость к эллиптическому параболоиду $z = 2x^2 + 4y^2$ параллельна плоскости $8x - 32y - 2z + 3 = 0$? Написать уравнения нормали и касательной плоскости в этой точке.

№334. [5, Пример № 8.42] Написать уравнение касательной плоскости и нормали к цилиндру $y^2 = 2px$ ($p > 0$) в произвольной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этого цилиндра.

¹Поверхность имеет форму седла.

Случай неявного задания кривой (поверхности):

№335. Составить уравнения касательной и нормали в точке $M(1, -1)$ к кривой

$$x^2 + 2xy^2 + 2y^5 = 1.$$

№336. Найти кратчайшее расстояние между плоскими кривыми

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 3\} \text{ и } \Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}.$$

№337. [8, № 3540] Составить уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M_0(3, 4, 12)$ к поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 = 169.$$

№338. Написать уравнение касательной плоскости и нормали в точке $M_0(1, 2, -1)$ к поверхности

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0.$$

№339. Составить уравнения нормали и касательной плоскости в точке $M_0(2, 3, 6)$ к поверхности, заданной неявно уравнением

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 4 = x + y + z.$$

№340. Написать уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M_0(1, 2, 2)$ к поверхности

$$2\frac{y}{z} + 2\frac{z}{x} = 6.$$

№341. Найти касательную плоскость в точке $M_0(0, 0, 0)$ к поверхности

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

№342. К поверхности эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + y + z = 1$.

№343. Найти уравнение такой нормали к поверхности $x^2 - z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$, которая параллельна прямой

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ -3x - 5y + 5z + 7 = 0. \end{cases}$$

№344. Найти расстояние между поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 169 \quad \text{и} \quad 3x + 4y + 12z + 182 = 0.$$

№345. Кривая задана системой неявных уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3y + 2 = 0, \\ 3x - y^2 - z = 0. \end{cases}$$

Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M_0(1, -1, 2)$.

№346. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $P(1, 1, 1)$ к кривой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0, \\ x^2 + z^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

№347. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M_0\left(\frac{3a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, a\right)$ к кривой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2ax, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2. \end{cases}$$

№348. [3, № 3091] Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс касательная к линии $z = \frac{x^2 + y^2}{4}$, $y = 4$ в точке $(2, 4, 5)$?

Параметрическое задание кривой (поверхности):

№349. Какую пространственную кривую задаёт система однопараметрических уравнений

$$\begin{cases} x = 4t - 1, \\ y = 3t, \\ z = t + 2 ? \end{cases}$$

№350. [8, № 3528] Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $t = t_0$ к пространственной кривой

$$\begin{cases} x = a \cos \alpha \cos t, \\ y = a \sin \alpha \cos t, \\ z = a \sin t, \end{cases}$$

где a, α – фиксированные числа, t – переменный параметр. Какую кривую задаёт эта система? Какую поверхность задаёт эта система в случае, когда α и t – два переменных параметра?

№351. [8, № 3529] Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $t = \frac{\pi}{4}$ к кривой

$$\begin{cases} x = a \sin^2 t, \\ y = b \sin t \cos t, \\ z = c \cos^2 t. \end{cases}$$

№352. [8, № 3534] Доказать, что касательная к *винтовой линии*

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt, \end{cases}$$

образует постоянный угол с осью Oz .

№353. [8, № 3533] На кривой

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = t^3, \end{cases}$$

найти точку, касательная в которой параллельна плоскости $x + 2y + z = 4$.

№354. [8, № 3538] Найти производную функции

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

в точке $M_0(1, 2, -2)$ в направлении касательной в этой точке к кривой $x = t$, $y = 2t^2$, $z = -2t^4$.

№355. Составить уравнения касательной плоскости и нормали в точке $(2, 3, 1)$ к поверхности, заданной двухпараметрической системой

$$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u + 2v, \\ z = 2u - v. \end{cases}$$

№356. [5, № 8.43] Составить уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$, где $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, к поверхности, заданной двухпараметрической системой

$$\begin{cases} x = u + v^2, \\ y = u^2 - v^3, \\ z = 2uv. \end{cases}$$

6.5 Ответы и решения

304. Функция дифференцируема в данной точке. Найдём её градиент:

$$\operatorname{grad} z = \{3x^2 + 6x + 4y; 4x + 2y\} \Big|_{(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})} = \{0; 0\},$$

поэтому производная по любому направлению, равная скалярному произведению градиента и единичного вектора направления, равна нулю.

305. Функция дифференцируема в данной точке. В качестве единичного вектора, задающего направление дифференцирования, выступает вектор $\vec{e} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$. Вычислим градиент функции в точке $(3, 1)$:

$$f'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} \Big|_{(3;1)} = \frac{3}{5}, \quad f'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} \Big|_{(3;1)} = \frac{1}{5}.$$

Тогда производная в данном направлении равна

$$\frac{\partial f(3, 1)}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f(3, 1)}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f(3, 1)}{\partial y} \cdot \cos \beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

Поскольку значение производной в точке оказалось положительным, то функция возрастает в этом направлении.

306. Ответ: $5\sqrt{2}/9$. См. решение предыдущей задачи.

307. Функция дифференцируема в данной точке. Так как $\alpha = \frac{\pi}{3}$, то $\beta = \frac{\pi}{6}$ и в качестве единичного вектора, задающего направление дифференцирования, имеем вектор $\vec{e} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Вычислим градиент функции в точке $(1, 1)$:

$$f'_x = 2x \cos(x^2 - y^2) \Big|_{(1,1)} = 2, \quad f'_y = -2y \cos(x^2 - y^2) \Big|_{(1,1)} = -2.$$

Тогда производная в указанном направлении равна

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} \cdot \cos \beta = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}.$$

308. Функция дифференцируема в данной точке. Имеем единичный вектор $\vec{l} \left\{ \cos \alpha, \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right\}$, $0 \leq \alpha < 2\pi$. Найдём производную в направлении $\vec{l}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(1, 1)}{\partial \vec{l}} &= \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} \cdot \sin \alpha = \\ &= (2x - y) \Big|_{(1,1)} \cdot \cos \alpha + (2y - x) \Big|_{(1,1)} \cdot \sin \alpha = \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

а) Наибольшее значение производной достигается, когда $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. С учётом $0 \leq \alpha < 2\pi$ находим искомое направление: $\alpha = \pi/4$.

б) Наименьшее значение производной достигается, когда $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -1$, т. е. $\alpha = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. С учётом $0 \leq \alpha < 2\pi$ находим направление: $\alpha = 5\pi/4$.

в) Наконец, производная равна 0 $\Leftrightarrow \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, т. е. $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. С учётом $0 \leq \alpha < 2\pi$ находим два направления: $\alpha = 3\pi/4$ и $\alpha = 7\pi/4$.

309. Функция дифференцируема в данной точке. Известно, что производная в точке достигает своего наибольшего значения в направлении градиента функции в этой точке. Поэтому по условию требуется найти отнормированный по длине (единичный) вектор градиента. Имеем:

$$\text{grad } f = \{f'_x, f'_y\} = \{2x - y, 2y - x\} \Big|_{(-1,2)} = \{-4, 5\},$$

тогда $|\text{grad } f(-1, 2)| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41}$, и искомый вектор равен $\frac{1}{\sqrt{41}}\{-4, 5\}$.

310. Функция дифференцируема в данной точке.

1) Найдём производную в направлении $\vec{l}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(M)}{\partial \vec{l}} &= \frac{\partial u(M)}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \cdot \cos \gamma = \\ &= (yz) \Big|_{\substack{y=1 \\ z=1}} \cdot \cos \alpha + (xz) \Big|_{\substack{x=1 \\ z=1}} \cdot \cos \beta + (xy) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} \cdot \cos \gamma = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma. \end{aligned}$$

2) Найдём величину градиента в точке M :

$$|\text{grad } f(M)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

311. Функция дифференцируема в данной точке. Найдём частные производные функции в точке M_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y^2 - yz) \Big|_{M_0} = -2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (2xy - xz) \Big|_{M_0} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (2z - xy) \Big|_{M_0} = 4.$$

Найдём направляющие косинусы (координаты единичного вектора в направлении вектора $\vec{a}$), для этого отнормируем вектор $\vec{a}$, разделив его на его длину:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3},$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{-2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = -\frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3},$$

т. е. $\vec{e} = \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$. Тогда для производной в заданном направлении получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{e}} &= \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cdot \cos \gamma = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

312. Функция дифференцируема в данной точке. Найдём частные производные функции в точке M_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2x) \Big|_{M_0} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (2y) \Big|_{M_0} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (2z) \Big|_{M_0} = 2.$$

Вычислим направляющие косинусы, для этого отнормируем вектор $\vec{s}$, разделив его покомпонентно на его длину:

$$\cos \alpha = \frac{s_x}{|\vec{s}|} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}},$$

$$\cos \beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{s_z}{|\vec{s}|} = \frac{3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}},$$

т. е. $\vec{e} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right\}$. Тогда для производной в заданном направлении получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{e}} &= \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cdot \cos \gamma = \\ &= 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}. \end{aligned}$$

313. Функция дифференцируема в данной точке. Найдём частные производные функции в точке M :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y^2 z^3) \Big|_M = 4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (2xy z^3) \Big|_M = 12, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (3xy^2 z^2) \Big|_M = 36.$$

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{MN} \{2, 2, 1\}$, его длину $|\overrightarrow{MN}| = 3$ и направляющие косинусы, отнормировав этот вектор делением на его длину:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{MN}_x}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{\overrightarrow{MN}_y}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{\overrightarrow{MN}_z}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{1}{3},$$

т. е. $\vec{e} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$. Тогда для производной в заданном направлении получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{e}} &= \frac{\partial u(M)}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \cdot \cos \gamma = \\ &= 4 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = \frac{68}{3} = 22\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

314. Функция дифференцируема в данной точке. Найдём координаты вектора $\overrightarrow{MN} \{1, 2, -2\}$ и его длину $|\overrightarrow{MN}| = 3$, тогда направляющие косинусы имеют вид $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \gamma = -\frac{2}{3}$. Найдём частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2xy + 2z)\Big|_P = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 + 3z^3)\Big|_P = 82, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (9yz^2 + 2x)\Big|_P = -160.$$

Для производной по направлению $\overrightarrow{MN}$ в точке P имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(P)}{\partial \vec{e}} &= \frac{\partial u(P)}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u(P)}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u(P)}{\partial z} \cdot \cos \gamma = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} + 82 \cdot \frac{2}{3} - 160 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 162.\end{aligned}$$

Так как производная положительна, то в точке P в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$ функция u возрастает.

315. Рассмотрим функцию $f(x, y) = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3$ в окрестности точки $(0, 0)$. Пусть направление $\vec{e}$ произвольно и задаётся направляющими косинусами $\{\cos \alpha, \cos \beta\}$. Для производной имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(0, 0)}{\partial \vec{e}} &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(l \cdot \cos \alpha, l \cdot \cos \beta) - f(0, 0)}{l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{l \cdot \cos \alpha} + \sqrt[3]{l \cdot \cos \beta}\right)^3}{l} = \\ &= \left(\sqrt[3]{\cos \alpha} + \sqrt[3]{\cos \beta}\right)^3,\end{aligned}$$

т. е. производная существует в любом направлении. Покажем, что, тем не менее, функция не дифференцируема в точке $(0, 0)$:

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3\sqrt[3]{xy} \cdot (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})}{\sqrt{x^2 + y^2}}.\end{aligned}$$

В частности, при $y = x$ имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{2}x}{|x|}$. Этот предел не существует, а значит, функция не дифференцируема в указанной точке.

316. Пусть $\vec{e} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ – единичный вектор в произвольном направлении. По определению производной и с учётом $\cos \beta = \sin \alpha$ имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(t \cos \alpha)^5}{(t \sin \alpha - (t \cos \alpha)^2)^2 + (t \cos \alpha)^8} - 0}{t}.$$

Этот предел, как легко проверить, существует при любом $\vec{e}$ (достаточно рассмотреть случаи $\sin \alpha \cos \alpha \neq 0$, $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = 0$). Разрывность функции следует из того, что предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8}$ не существует. В самом деле, если положить $x = 0$, $y \neq 0$, $y \rightarrow 0$, то предел равен 0, а если $y = x^2$, $x \neq 0$, $x \rightarrow 0$, то бесконечности.

317. По определению производной и с учётом $\cos \beta = \sin \alpha$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|(t \cos \alpha)^2 - 3(t \sin \alpha)^2|} - 0}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t| \sqrt{|\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha|}}{t}. \end{aligned}$$

Этот предел существует только при условии $\sqrt{|\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha|} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{3}$, откуда находим векторы направлений возможного дифференцирования: $\vec{l} \in \{\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{2}\}$, где знаки берутся произвольным образом. В точке $(0, 0)$ функция не дифференцируема (докажите самостоятельно).

318. Проведём через произвольную точку M скалярного поля $u = f(M)$ поверхность уровня $u = \text{const}$ и выберем на этой поверхности произвольную гладкую кривую L , проходящую через точку M . Пусть $\vec{l}$ – вектор, касательный к кривой L в точке M . Пусть $M_1 \in L$ – ещё одна точка на кривой L в окрестности точки M . С одной стороны, так как для точек M и M_1 , принадлежащих L , а значит и поверхности уровня, имеем $u(M) = u(M_1)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M) = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{u(M_1) - u(M)}{MM_1} = 0.$$

С другой стороны, имеем $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M) = \langle \operatorname{grad} f(M), \vec{e} \rangle$, где $\vec{e} = \vec{l}/|\vec{l}|$. Поэтому $\langle \operatorname{grad} f(M), \vec{e} \rangle = 0$. Это означает, что векторы $\operatorname{grad} f(M)$ и $\vec{e}$ ортогональны. Итак, вектор $\operatorname{grad} f(M)$ ортогонален любой касательной к поверхности уровня в точке M . Тем самым, он ортогонален самой поверхности уровня в точке M .

319. Продемонстрируем идею доказательства на примере функций трёх переменных. По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(uv) &= \frac{\partial(uv)}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial(uv)}{\partial z} \cdot \vec{k} = \\ &= \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \vec{j} + \left(v \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{k} = \\ &= v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{k} \right) = v \cdot \operatorname{grad} u + u \cdot \operatorname{grad} v.\end{aligned}$$

320. Продемонстрируем идею доказательства на примере функций трёх переменных. По определению градиента имеем:

$$\operatorname{grad} F(u) = \frac{\partial F(u)}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial F(u)}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial F(u)}{\partial z} \cdot \vec{k}.$$

Применим ко всем слагаемым правой части правило дифференцирования сложной функции:

$$\operatorname{grad} F(u) = F'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + F'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + F'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k} = F'(u) \cdot \operatorname{grad} u.$$

321. Найдём градиент функции

$$\operatorname{grad} f = \{f'_x, f'_y\} = \left\{ \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right\} \Big|_{(0,e)} = \left\{ 0, \frac{2}{e} \right\}.$$

Производная в направлении градиента равна его модулю:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} \Big|_{(0,e)} = |\operatorname{grad} f| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{e}\right)^2} = \frac{2}{e}.$$

322. Поскольку производная функции $u = f(M)$ в точке M_0 в направлении единичного вектора $\vec{e}$ равна скалярному произведению градиента в указанной точке и данного единичного вектора, т. е.

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \langle \operatorname{grad} f(M_0), \vec{e} \rangle,$$

то, применяя векторную форму неравенства Коши–Буняковского, получаем оценку:

$$-|\operatorname{grad} f(M_0)| \leq \langle \operatorname{grad} f(M_0), \vec{e} \rangle \leq |\operatorname{grad} f(M_0)|,$$

откуда получаем искомое утверждение, поскольку правое неравенство в этой системе обращается в равенство в случае сонаправленных векторов $\operatorname{grad} f(M_0)$

и $\vec{e}$ (т. е. когда производная берётся в направлении градиента в точке M_0), а левое неравенство становится равенством в случае противоположно направленных векторов $\text{grad } f(M_0)$ и $\vec{e}$ (т. е. когда производная берётся в направлении антиградиента в данной точке).

323. Вычислим градиент в произвольной точке:

$$\text{grad } u(x, y, z) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \{2x, 2y, -2z\}.$$

Тогда $\text{grad } u(A) = \{2\varepsilon, 0, 0\}$, $\text{grad } u(B) = \{0, 2\varepsilon, 0\}$. Найдём косинус угла φ между этими векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \text{grad } u(A), \text{grad } u(B) \rangle}{|\text{grad } u(A)| \cdot |\text{grad } u(B)|} = \frac{2\varepsilon \cdot 0 + 0 \cdot 2\varepsilon + 0 \cdot 0}{2|\varepsilon| \cdot 2|\varepsilon|} = 0.$$

Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и градиенты перпендикулярны.

324. 1) Найдём градиент функции $\varphi(x, y, z)$:

$$\text{grad } \varphi(M) = \{yz - 2x, xz - 2y, xy - 2z\} \Big|_{M_0} = \{-3, -3, 3\}.$$

Длина градиента равна $|\text{grad } \varphi(M_0)| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$. Тогда единичный вектор в направлении градиента: $\vec{e} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{zy + 2xz^2}{y^2 + x^2z^2} \right) \Big|_{M_0} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{2y - xz}{y^2 + x^2z^2} \right) \Big|_{M_0} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{xy + 2x^2z}{y^2 + x^2z^2} \right) \Big|_{M_0} = -\frac{1}{2},$$

а производная в направлении градиента равна

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{e}} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{5}{2\sqrt{3}}.$$

325. Можно было бы решить задачу стандартно, вычислив обычным образом частные производные функции, однако рассмотрим другой – операторный – способ решения. Введём обозначения $u = xyz$, $v = \exp(x^2 + y^2 + z^2)$. Тогда

$$\nabla f = \nabla \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}.$$

Здесь $\nabla u = \{yz, xz, xy\}$, $\nabla v = \exp(x^2 + y^2 + z^2) \{2x, 2y, 2z\}$. Следовательно,

$$\nabla f = \frac{\{yz, xz, xy\} - xyz \{2x, 2y, 2z\}}{\exp(x^2 + y^2 + z^2)} =$$

$$= \frac{\{yz - 2x^2yz, xz - 2xy^2z, xy - 2xyz^2\}}{\exp(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{\{yz(1 - 2x^2), xz(1 - 2y^2), xy(1 - 2z^2)\}}{\exp(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

326. Используя правило дифференцирования сложной функции $\nabla f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \nabla u + \frac{\partial f}{\partial v} \nabla v$, получаем

$$\begin{aligned} \nabla f &= \varphi \cdot \nabla(xy) + xy \nabla \varphi = \varphi \cdot \{y, x, 0\} + xy \cdot (\varphi'_u \nabla u + \varphi'_v \nabla v) = \\ &= \varphi \cdot \{y, x, 0\} + xy \varphi'_u \cdot \{2x, 0, 2z\} + xy \varphi'_v \cdot \{0, 1, 1\} = \\ &= \{y\varphi + 2x^2y\varphi'_u, x\varphi + xy\varphi'_v, 2xyz\varphi'_u + xy\varphi'_v\}. \end{aligned}$$

327. Убедившись в том, что данная точка лежит на поверхности, найдём частные производные первого порядка:

$$f'_x = (2x) \Big|_{x=1} = 2, \quad f'_y = (2y) \Big|_{y=2} = 4.$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

$$z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2), \quad \text{или} \quad 2x + 4y - z - 5 = 0.$$

Теперь напишем уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 5}{-1}.$$

328. Убедившись в том, что данная точка лежит на поверхности, найдём частные производные первого порядка: $z'_x(2, 1) = 4$, $z'_y(2, 1) = -2$. Тогда уравнение касательной плоскости: $z - 3 = 4(x - 2) - 2(y - 1)$, или $4x - 2y - z - 3 = 0$, а уравнение нормали: $\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 3}{-1}$.

329. Убедимся в том, что данная точка лежит на поверхности, и будем считать, что данная поверхность задана неявно уравнением $F(x, y, z) \equiv x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y - z = 0$. Имеем $\frac{\partial F}{\partial x} = (2x - 2y - 1) \Big|_M = -1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = (-2x + 2y + 2) \Big|_M = 2$, $\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_M = -1$. Тогда уравнение касательной плоскости: $-1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 2) - 1 \cdot (z - 1) = 0$, т. е. $x - 2y + z + 2 = 0$. Уравнение нормали: $\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 1}{-1}$.

330. Убедившись в том, что данная точка лежит на поверхности, найдём частные производные:

$$f'_x = e^{x \cos y} \cdot \cos y \Big|_{M_0} = -\frac{1}{e}, \quad f'_y = -e^{x \cos y} \cdot x \sin y \Big|_{M_0} = 0.$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

$$z - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}(x - 1) + 0 \cdot (y - \pi), \quad \text{или} \quad x + ez - 2 = 0.$$

Теперь напишем уравнения нормали: $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - \pi}{0} = \frac{z - z_0}{-1},$

$$\frac{x - 1}{-\frac{1}{e}} = \frac{y - \pi}{0} = \frac{z - \frac{1}{e}}{-1}, \quad \text{или} \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - \pi}{0} = \frac{z - \frac{1}{e}}{e}.$$

331. Проверим, что точка принадлежит поверхности, подставив её координаты в уравнение поверхности: $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ – верно. Воспользуемся уравнением касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Вычислим $z_0 = z(3, 1) = \frac{1}{2}$ и частные производные:

$$f'_x = -\frac{\pi y}{x^2} \left(-\sin \frac{\pi y}{x} \right) \Big|_{(3,1)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}, \quad f'_y = \frac{\pi}{x} \left(-\sin \frac{\pi y}{x} \right) \Big|_{(3,1)} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

Тогда получаем уравнение касательной: $z - \frac{1}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}(x - 3) - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}(y - 1)$. Уравнения нормали $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$ в данной задаче принимают вид $\frac{x - 3}{\frac{\pi\sqrt{3}}{18}} = \frac{y - 1}{-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1}.$

332. Проверим, что точка принадлежит поверхности, подставив её координаты в уравнение поверхности: $1 = \sin \frac{\pi}{2}$ – верно. Воспользуемся уравнением касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Вычислим $z_0 = z(1; 2) = 1$ и частные производные:

$$f'_x = \frac{\pi}{y} \left(\cos \frac{\pi x}{y} \right) \Big|_{(1;2)} = 0, \quad f'_y = -\frac{\pi x}{y^2} \left(\cos \frac{\pi x}{y} \right) \Big|_{(1;2)} = 0.$$

Тогда получаем уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = 0 \cdot (x - 3) + 0 \cdot (y - 1), \quad \text{т. е.} \quad z = 1.$$

Уравнения нормали $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$ в данной задаче принимают вид $\frac{x - 1}{0} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z - 1}{-1}$, т. е. $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

333. Уравнение касательной плоскости в случае явного задания поверхности имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

$$\text{т. е. } z - z_0 = 4x_0(x - x_0) + 8y_0(y - y_0),$$

$$\text{или } 4x_0(x - x_0) + 8y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Эта плоскость параллельна плоскости $8x - 32y - 2z + 3 = 0$ при условии пропорциональности соответствующих коэффициентов:

$$\frac{4x_0}{8} = \frac{8y_0}{-32} = \frac{-1}{-2},$$

откуда находим $x_0 = 1$, $y_0 = -2$. Из уравнения $z = 2x^2 + 4y^2$ находим $z_0 = 18$. Следовательно, $M_0(1, -2, 18)$ – искомая точка. При найденных значениях x_0 , y_0 , z_0 уравнение касательной плоскости принимает вид

$$4(x - 1) - 16(y + 2) - (z - 18) = 0, \quad \text{или } 4x - 16y - z - 18 = 0.$$

Тогда уравнения нормали в точке M_0 принимают вид:

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y + 2}{-16} = \frac{z - 18}{-1}.$$

334. Цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz , не может быть задана функцией вида $z = z(x, y)$. В данном случае можно рассматривать эту поверхность как определённую функцией $x = \frac{y^2}{2p}$. Тогда

$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{y}{p}$, $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$ и уравнение касательной плоскости в точке M_0 имеет вид

$$x - x_0 = \frac{y_0}{p}(y - y_0), \quad \text{или } p(x - x_0) - y_0(y - y_0) = 0.$$

Можно рассматривать цилиндр и как поверхность, определённую неявно соотношением $y^2 - 2px = 0$. Уравнения нормали к цилиндру в точке M_0 имеют вид

$$x = x_0 + pt, \quad y = y_0 - y_0 t, \quad z = z_0.$$

В любой точке цилиндра касательная плоскость вертикальна (параллельна оси Oz), а нормаль горизонтальна (перпендикулярна оси Oz).

335. Убедившись, что точка принадлежит кривой, и вводя обозначение $F \equiv x^2 + 2xy^2 + 2y^5 - 1$, где

$$F'_x = 2(x + y^2)\Big|_M = 4, \quad F'_y = (4xy + 10y^4)\Big|_M = 6,$$

выпишем уравнение касательной прямой:

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

$$4(x - 1) + 6(y + 1) = 0, \quad \text{или} \quad 2x + 3y + 1 = 0.$$

Уравнение касательной также можно было записать через угловой коэффициент $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Уравнение нормали:

$$F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

$$6(x - 1) - 4(y + 1) = 0, \quad \text{или} \quad 3x - 2y - 5 = 0.$$

Уравнение нормали может быть записано через угловой коэффициент $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ (или в каноническом виде $\frac{x - 1}{4} = \frac{y + 1}{6}$).

336. Убедившись в том, что гипербола не пересекается с прямой, заметим, что в точке гиперболы, ближайшей к прямой, касательная параллельна прямой $y = 2x$. Обозначим $F(x, y) = x^2 - y^2 - 3$ и найдём производную в точке (x_0, y_0) :

$$y'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x}{F'_y}\Big|_{(x_0, y_0)} = -\frac{2x}{-2y}\Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{x_0}{y_0}.$$

Условие параллельности касательной к гиперболе и прямой $y = 2x$ в точке (x_0, y_0) : $\frac{x_0}{y_0} = 2$. Имеем систему: $\begin{cases} x_0 = 2y_0, \\ x_0^2 - y_0^2 = 3, \end{cases}$ откуда находим две точки $M_1(2, 1)$, $M_2(-2, -1)$. Воспользуемся далее формулой расстояния от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$ ($2x - y = 0$):

$$d_1 = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2x_0 - y_0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}\Big|_{(2,1)} = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad d_2 = \frac{|2x_0 - y_0|}{\sqrt{5}}\Big|_{(-2,-1)} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

(неудивительно, что расстояния от точек M_1, M_2 гиперболы до прямой оказались равны, это следует из симметрии задачи).

337. Обозначим $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 169$, тогда

$$F'_x(M_0) = 2x\Big|_{M_0} = 6, \quad F'_y(M_0) = 2y\Big|_{M_0} = 8, \quad F'_z(M_0) = 2z\Big|_{M_0} = 24.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

$$6(x - 3) + 8(y - 4) + 24(z - 12) = 0, \quad \text{или} \quad 3x + 4y + 12z - 169 = 0,$$

а уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)},$$

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 4}{4} = \frac{z - 12}{12}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12}.$$

338. В данном случае $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6$. Вычислим значения частных производных в точке M_0 :

$$F'_x = (3x^2 + yz) \Big|_{M_0} = 1, \quad F'_y = (3y^2 + xz) \Big|_{M_0} = 11, \quad F'_z = (3z^2 + xy) \Big|_{M_0} = 5,$$

тогда уравнение касательной плоскости в точке M_0 имеет вид

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

$$(x - 1) + 11(y - 2) + 5(z + 1) = 0, \quad \text{или} \quad x + 11y + 5z - 18 = 0,$$

а уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{11} = \frac{z + 1}{5}.$$

339. Уравнение поверхности имеет вид $F(x, y, z) \equiv 0$, где $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 4 - x - y - z$. Найдём частные производные функции $F(x, y, z)$ и их значения в точке M_0 :

$$F'_x = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1 \right) \Big|_{M_0} = -\frac{5}{7}, \quad F'_y = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1 \right) \Big|_{M_0} = -\frac{4}{7},$$

$$F'_z = \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1 \right) \Big|_{M_0} = -\frac{1}{7},$$

тогда уравнение касательной плоскости в точке M_0 имеет вид

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

$$-\frac{5}{7}(x - 2) - \frac{4}{7}(y - 3) - \frac{1}{7}(z - 6) = 0 \Leftrightarrow 5x + 4y + z - 28 = 0,$$

а уравнения нормали, соответственно, вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)},$$

$$\frac{x - 2}{-\frac{5}{7}} = \frac{y - 3}{-\frac{4}{7}} = \frac{z - 6}{-\frac{1}{7}} \Leftrightarrow \frac{x - 2}{5} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z - 6}{1}.$$

340. Уравнение поверхности имеет вид $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z) \equiv 2\frac{y}{z} + 2\frac{z}{x} - 6$. Найдём частные производные функции $F(x, y, z)$ и их значения в точке M_0 :

$$F'_x = \left(-\frac{z}{x^2} \cdot 2\frac{z}{x} \cdot \ln 2 \right) \Big|_{M_0} = -8 \ln 2, \quad F'_y = \left(\frac{1}{z} \cdot 2\frac{y}{z} \cdot \ln 2 \right) \Big|_{M_0} = \ln 2,$$

$$F'_z = \left(\frac{1}{x} \cdot 2\frac{z}{x} \cdot \ln 2 - \frac{y}{z^2} \cdot 2\frac{y}{z} \cdot \ln 2 \right) \Big|_{M_0} = 3 \ln 2,$$

тогда уравнение касательной плоскости в точке M_0 имеет вид

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

$$-8 \ln 2 \cdot (x - 1) + \ln 2 \cdot (y - 2) + 3 \ln 2 \cdot (z - 2) = 0,$$

$$8x - y - 3z = 0,$$

а канонические уравнения нормали, соответственно, вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)},$$

$$\frac{x - 1}{-8 \ln 2} = \frac{y - 2}{\ln 2} = \frac{z - 3}{3 \ln 2} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{8} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 3}{-3}.$$

341. Обозначим $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Уравнение касательной плоскости в точке M_0 :

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0.$$

Вспомним, что в уравнении плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ коэффициенты A, B, C не должны одновременно обращаться в нуль ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$). В данном случае в точке $M_0(0, 0, 0)$ это условие нарушается. В чём дело? Данная поверхность является конусом, в вершине которого (точка M_0) касательная плоскость не существует, т. к. функция $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ не дифференцируема в этой точке.

342. Обозначим $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 11$. Уравнение касательной плоскости в точке M_0 :

$$\begin{aligned} F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) &= 0, \\ 2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 6z_0(z - z_0) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Условия параллельности и прохождения через точку M_0 :

$$\begin{cases} \frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{1} = \frac{6z_0}{1}, \\ x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 11. \end{cases}$$

Система имеет два решения: $M'_0\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $M''_0\left(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Подставляя координаты найденных точек в (1) и упрощая, получаем уравнения двух касательных плоскостей: $x + y + z - \frac{11}{\sqrt{6}} = 0$, $x + y + z + \frac{11}{\sqrt{6}} = 0$.

343. Прямая задана как линия пересечения двух плоскостей. Найдём её направляющий вектор $\vec{l}$ как векторное произведение нормальных векторов этих плоскостей:

$$\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

В силу того, что прямая параллельна нормали, её направляющий вектор $\vec{l}$ служит и направляющим вектором $\vec{n}$ нормали. Пусть искомая нормаль проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащую поверхности $F(x, y, z) = x^2 - z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Вычислив значения частных производных в точке M_0

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) = (2x - 2)\Big|_{M_0} = 2x_0 - 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(M_0) = 4, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(M_0) = -2z\Big|_{M_0} = -2z_0,$$

найдем координаты направляющего вектора нормали $\vec{n} = \{2x_0 - 2, 4, -2z_0\}$. Так как вектор $\vec{n}$ коллинеарен вектору $\vec{l}$, их соответствующие координаты пропорциональны, т. е.

$$\frac{2x_0 - 2}{5} = \frac{4}{-2} = \frac{-2z_0}{1},$$

отсюда находим $x_0 = -4$, $z_0 = 1$. Осталось определить ординату точки M_0 . Так как точка M_0 принадлежит поверхности, её координаты удовлетворяют уравнению поверхности $F(x, y, z) = 0$. Подставляя $x_0 = -4$, $z_0 = 1$ в уравнение поверхности, найдём $y_0 = -6$. Таким образом, $M_0(-4, -6, 1)$. Наконец,

используя координаты направляющего вектора нормали $\vec{l}$ и точки M_0 , запишем канонические уравнения искомой нормали:

$$\frac{x+4}{5} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

344. Найдём уравнение касательной плоскости к сфере в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$F'_x(M_0)(x-x_0) + F'_y(M_0)(y-y_0) + F'_z(M_0)(z-z_0) = 0,$$

$$2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) + 2z_0(z-z_0) = 0.$$

Наименьшее (наибольшее) расстояние от сферы до плоскости достигается, когда касательная плоскость к сфере параллельна плоскости $3x + 4y + 12z + 182 = 0$:

$$\frac{x_0}{3} = \frac{y_0}{4} = \frac{z_0}{12} = t,$$

откуда $x_0 = 3t$, $y_0 = 4t$, $z_0 = 12t$. Подставляя в уравнение сферы, находим $t = \pm 1$, откуда имеем две точки $M_1(3, 4, 12)$ и $M_2(-3, -4, -12)$. По формуле расстояния от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ имеем:

$$d_1 = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 12 \cdot 12 + 182|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = 27,$$

$$d_2 = \frac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-4) + 12 \cdot (-12) + 182|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = 1.$$

Ответ: $d_{\min} = 1$.

345. Обозначим $F(x, y, z) = x^2 + 3y + 2$, $G(x, y, z) = 3x - y^2 - z$. Касательная прямая в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ определяется системой

$$\begin{cases} F'_x(M_0)(x-x_0) + F'_y(M_0)(y-y_0) + F'_z(M_0)(z-z_0) = 0, \\ G'_x(M_0)(x-x_0) + G'_y(M_0)(y-y_0) + G'_z(M_0)(z-z_0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-1) + 3(y+1) = 0, \\ 3(x-1) + 2(y+1) - (z-2) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 3x + 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Можно оставить уравнения касательной в таком виде, а можно, подобрав ещё одну точку этой прямой, например $M_1(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, составить канонические уравнения касательной M_0M_1 :

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y+1}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{z-2}{\frac{1}{3}-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-5}.$$

Найдём уравнение нормальной плоскости. Выбирая в качестве нормали к ней найденный выше направляющий вектор касательной $\{-3, 2, -5\}$, получим уравнение нормальной плоскости: $-3(x-1) + 2(y+1) - 5(z-2) = 0$. Можно было получить то же самое уравнение по формуле нормальной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $-3x + 2y - 5z + 15 = 0$.

346. Имеем

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0, \\ G(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Найдём значения частных производных у F и G в точке P :

$$F'_x = 2x \Big|_P = 2, \quad F'_y = 2y \Big|_P = 2, \quad F'_z \Big|_P = 0,$$

$$G'_x = 2x \Big|_P = 2, \quad G'_y = 0 \Big|_P = 0, \quad G'_z = 2z \Big|_P = 2.$$

Уравнения касательной прямой:

$$\begin{cases} 2(x-1) + 2(y-1) = 0, \\ 2(x-1) + 2(z-1) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=0, \\ x+z-2=0. \end{cases}$$

Эта прямая проходит через точку $P(1, 1, 1)$ и, например, точку $N(2, 0, 1)$. За направляющий вектор можно взять вектор $\overrightarrow{PN}\{1, -1, -1\}$. Тогда уравнения касательной прямой в каноническом виде: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$. Уравнение нормальной плоскости: $(x-1) - (y-1) - (z-1) = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 1 = 0$.

347. Уравнения касательной: $x = \frac{3a}{2} - t$, $y = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{t}{\sqrt{3}}$, $z = a + t$; уравнение нормальной плоскости $\left(x - \frac{3a}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) - (z - a) = 0$.

348. Обозначим $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$, тогда

$$F'_x = 2x \Big|_{(2,4,5)} = 4, \quad F'_y = 2y \Big|_{(2,4,5)} = 8, \quad F'_z = -4 \Big|_{(2,4,5)} = -4.$$

Уравнение касательной плоскости в точке $M_0(2, 4, 5)$:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

$$4(x-2) + 8(y-4) - 4(z-5) = 0 \Leftrightarrow z = 5 + (x-2) + 2(y-4).$$

При $y = 4$ получаем прямую $z = x + 3$, образующую с положительным направлением оси Ox угол 45° .

349. Эти параметрические уравнения задают прямую. В самом деле, Исключая параметр t , получим два уравнения, каждое из которых есть уравнение плоскости. Например, если из 1-го уравнения вычесть 2-е и 3-е, получим $x - y - z = -3$. Вычитая же из 1-го 3-е, умноженное на 4, получим $x - 4z = -9$. Таким образом, заданная прямая является линией пересечения плоскостей $x - y - z + 3 = 0$ и $x - 4z + 9 = 0$.

350. 1) Уравнения касательной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x - x_0}{x'_t(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'_t(t_0)},$$

$$\text{т. е.} \quad \frac{x - x(t_0)}{-a \cos \alpha \sin t_0} = \frac{y - y(t_0)}{-a \sin \alpha \sin t_0} = \frac{z - z(t_0)}{a \cos t_0}.$$

2) Уравнение нормальной плоскости:

$$(x - x_0)x'_t(t_0) + (y - y_0)y'_t(t_0) + (z - z_0)z'_t(t_0) = 0,$$

$$(x - x_0)(-a \cos \alpha \sin t_0) + (y - y_0)(-a \sin \alpha \sin t_0) + (z - z_0)(a \cos t_0) = 0,$$

$$\text{или} \quad z - z_0 = (x - x_0) \cos \alpha \operatorname{tg} t_0 + (y - y_0) \sin \alpha \operatorname{tg} t_0.$$

Данная система задаёт окружность (объясните, почему). В случае, когда α и t — два переменных параметра, эта система определяет сферу радиуса a с центром в начале координат (для доказательства найдите $x^2 + y^2 + z^2$).

351. Найдём производные $x'(t) = 2a \sin t \cos t$, $y'(t) = b(\cos^2 t - \sin^2 t)$, $z'(t) = -2c \cos t \sin t$, а также $x_0 = x(\frac{\pi}{4}) = \frac{a}{2}$, $y_0 = y(\frac{\pi}{4}) = \frac{b}{2}$, $z_0 = z(\frac{\pi}{4}) = \frac{c}{2}$, $x'(\frac{\pi}{4}) = a$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 0$, $z'(\frac{\pi}{4}) = -c$. Тогда уравнения касательной прямой:

$$\frac{x - x_0}{x'_t(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'_t(t_0)} \Leftrightarrow \frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{y - \frac{b}{2}}{0} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c},$$

а уравнение нормальной плоскости:

$$(x - x_0) \cdot x'_t(t_0) + (y - y_0) \cdot y'_t(t_0) + (z - z_0) \cdot z'_t(t_0) = 0,$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)a + \left(z - \frac{c}{2}\right)(-c) = 0, \quad \text{или} \quad ax - cz - \frac{1}{2}(a^2 - c^2) = 0.$$

352. Составим уравнения касательной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x - x_0}{x'_t(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'_t(t_0)}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{x - x(t_0)}{-a \sin t_0} = \frac{y - y(t_0)}{a \cos t_0} = \frac{z - z(t_0)}{b}.$$

Таким образом, направляющий вектор касательной имеет вид $\vec{l}\{-a \sin t_0, a \cos t_0, b\}$. При этом направляющий вектор (орт) оси Oz есть вектор $\vec{k}\{0, 0, 1\}$. Достаточно показать, что косинус угла между этими векторами не зависит от t_0 :

$$\cos(\widehat{\vec{l}, \vec{k}}) = \frac{\langle \vec{l}, \vec{k} \rangle}{|\vec{l}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{-a \sin t_0 \cdot 0 + a \cos t_0 \cdot 0 + b \cdot 1}{\sqrt{(-a \sin t_0)^2 + (a \cos t_0)^2 + b^2} \cdot 1} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{const.}$$

353. Выпишем уравнения касательной к кривой:

$$\frac{x - x_0}{x'_t(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'_t(t_0)}, \quad \text{или} \quad \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{2t_0} = \frac{z - z_0}{3t_0^2}.$$

Следовательно, направляющий вектор касательной прямой есть $\vec{l}\{1, 2t_0, 3t_0^2\}$. Нормальный вектор плоскости: $\vec{N}\{1, 2, 1\}$. Прямая параллельна плоскости тогда и только тогда, когда её направляющий вектор перпендикулярен нормали к плоскости, т. е. $\vec{l} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \langle \vec{l}, \vec{N} \rangle = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 1 + 2t_0 \cdot 2 + 3t_0^2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow t_0 = -1$ или $t_0 = -\frac{1}{3}$. В первом случае получим $x_0 = -1, y_0 = 1, z_0 = -1$. Во втором случае находим $x_0 = -\frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{9}, z_0 = -\frac{1}{27}$. Ответ: $M_1(-1, 1, -1), M_2(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$.

354. 1) Найдём касательную к кривой $x = t, y = 2t^2, z = -2t^4$, проходящую через точку $M_0(1, 2, -2)$:

$$\frac{x - x_0}{x'_t(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'_t(t_0)}, \quad \text{или} \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{4t_0} = \frac{z + 2}{-8t_0^3}.$$

Подставим вместо x, y, z числа $t_0, 2t_0^2, -2t_0^4$, получим систему

$$\frac{t_0 - 1}{1} = \frac{2t_0^2 - 2}{4t_0} = \frac{-2t_0^4 + 2}{-8t_0^3},$$

из которой находим $t_0 = 1$. При этом направляющий вектор касательной будет $\vec{l}\{1, 4t_0, -8t_0^3\} \Big|_{t_0=1} = \vec{l}\{1, 4, -8\}, |\vec{l}| = 9$. Тогда единичный вектор, задающий направление дифференцирования, есть $\vec{e} \left\{ \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{9} \right\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$.

2) Найдём частные производные функции u :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{(1,2,-2)} = \frac{8}{27}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{(1,2,-2)} = -\frac{2}{27},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{(1,2,-2)} = \frac{2}{27}.$$

Тогда производная по направлению $\vec{e}$ равна

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{e}} &= \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cdot \cos \gamma = \\ &= \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9} - \frac{2}{27} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{27} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right) = -\frac{16}{243}.\end{aligned}$$

355. Убедившись, что данная точка принадлежит поверхности (при $u = v = 1$), вычислим определители

$$\begin{aligned}A &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2u \\ -1 & 2v \end{vmatrix} = (4v + 2u)|_{u=v=1} = 6, \\ C &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 2v & 2 \end{vmatrix} = (4u - 2v)|_{u=v=1} = 2.\end{aligned}$$

Тогда уравнение касательной плоскости в точке $(2, 3, 1)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

$$-5(x - 2) + 6(y - 3) + 2(z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5x + 6y + 2z - 10 = 0,$$

а уравнения нормальной прямой

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - 2}{-5} = \frac{y - 3}{6} = \frac{z - 1}{2}.$$

356. Имеем $x'_u = 1|_{(2,1)} = 1$, $x'_v = 2v|_{(2,1)} = 2$, $y'_u = 2u|_{(2,1)} = 4$, $y'_v = -3v^2|_{(2,1)} = -3$, $z'_u = 2v|_{(2,1)} = 2$, $z'_v = 2u|_{(2,1)} = 4$, $x_0 = x(2, 1) = 3$, $y_0 = y(2, 1) = 3$, $z_0 = z(2, 1) = 4$. Следовательно, уравнение касательной плоскости в точке M_0 имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u(M_0) & y'_u(M_0) & z'_u(M_0) \\ x'_v(M_0) & y'_v(M_0) & z'_v(M_0) \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - 3 & y - 3 & z - 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $2x - z - 2 = 0$, а уравнения нормали: $x = 3 + 2t$, $y = 3$, $z = 4 - t$.

7 СЕМИНАР: Формула Тейлора для функции многих переменных

*«Каждый человек время от времени воодушевляется.
У одного воодушевления хватает на 30 минут,
у другого на 30 дней.
Но добиться чего-то в жизни удаётся только тому,
у кого воодушевления хватает на 30 лет».*

*Клаус Кобьелл (род. 1948) – немецкий бизнесмен,
в книге «Мотивация в стиле экин».*

С целью защиты авторских прав НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Ранее мы рассматривали разложение функций одной переменной по формуле Тейлора. Обратимся к обобщению этой теоремы на случай функций многих переменных. И в этом случае смысл формулы Тейлора состоит в аппроксимации (при выполнении некоторых условий) функции в окрестности заданной точки алгебраическим многочленом. Такого рода приближения бывают нужны во многих математических задачах. Сравним, как выглядят условия, которым должна удовлетворять функция нескольких переменных, чтобы её с достаточной степенью точности можно было приблизить многочленом Тейлора (а в некоторых случаях и разложить в степенной ряд).

7.1 Формула Тейлора. Виды остаточных членов

«Без хорошего труда нет плода».
Русская пословица.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (*многомерный аналог формулы Тейлора в окрестности заданной точки*). Если функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ определена и $(n + 1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$, то для всех точек $M(x_1, \dots, x_m)$ из этой окрестности справедлива формула

$$f(M) = f(M_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left((x_1 - x_1^\circ) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^\circ) \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k \cdot f(M_0) + R_n(M),$$

где $R_n(M)$ – *остаточный член*.

Формула Тейлора позволяет приблизить функцию достаточно произвольного вида (вообще говоря, трансцендентную) в некоторой окрестности точки

M_0 алгебраическим многочленом n -й степени (многочленом Тейлора) по целым неотрицательным степеням биномов $x_1 - x_1^\circ$, $x_2 - x_2^\circ$, ..., $x_m - x_m^\circ$, а остаточный член характеризует точность такого приближения.

При этом, чем ближе находится точка M к точке M_0 , тем меньше, вообще говоря, величина остаточного члена и выше точность аппроксимации. Кроме того, точность возрастает с ростом n . Это означает, что чем больше непрерывных производных имеет функция $f(M)$ в окрестности M_0 , тем точнее представляет её многочлен Тейлора.

В дифференциальной форме формула Тейлора выглядит компактнее:

$$f(M) = f(M_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot d^k f(M_0) + R_n(M),$$

где $dx_1 = x_1 - x_1^\circ$, ..., $dx_m = x_m - x_m^\circ$. Если под дифференциалом 0-го порядка понимать саму функцию $d^0 f(M) = f(M)$, то последнюю формулу с учётом $0! = 1$ можно записать ещё короче:

$$f(M) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot d^k f(M_0) + R_n(M).$$

Остаточный член $R_n(M)$ в форме Лагранжа имеет вид

$$R_n(M) = \frac{1}{(n+1)!} \left((x_1 - x_1^\circ) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^\circ) \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{n+1} \cdot f(x_1^\circ + \Theta(x_1 - x_1^\circ), \dots, x_m^\circ + \Theta(x_m - x_m^\circ)), \quad 0 < \Theta < 1,$$

где все частные производные в этой символической формуле вычисляются в промежуточной точке M' , лежащей на отрезке M_0M . Иными словами, для каждой точки M из окрестности M_0 найдётся своё число $\Theta = \Theta(M) \in (0, 1)$. В дифференциальной форме этот остаточный член имеет вид

$$R_n(M) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_1^\circ + \Theta dx_1, \dots, x_m^\circ + \Theta dx_m).$$

В форме Пеано остаточный член выглядит проще:

$$R_n(M) = o(\rho^n),$$

где через ρ обозначено расстояние $\rho(M_0, M)$ между точками M_0 и M , а символ $o(\rho^n)$ обозначает бесконечно малую при $M \rightarrow M_0$ функцию более высокого порядка малости, чем ρ^n .

Приведём формулировку теоремы для случая остаточного члена в форме Пеано (обратим внимание, что требования к функции здесь немного ослаблены).

Теорема 2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция $u = f(x_1, \dots, x_m) = f(M)$ задана и $(n-1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$ и n раз дифференцируема в самой точке. Тогда для любой точки M из указанной окрестности справедлива формула:

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!} du \Big|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2 u \Big|_{M_0} + \dots + \frac{1}{n!} d^n u \Big|_{M_0} + o(\rho^n).$$

Пример 125. Разложим функцию двух переменных $u = f(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ до членов n -го порядка включительно с остаточным членом в форме Пеано:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \\ & + \frac{1}{2!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \\ & + \frac{1}{3!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(x_0, y_0) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{n!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + o(\rho^n). \end{aligned}$$

В частности, при $n = 3$ получим

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left((x - x_0) \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{1}{2!} \left((x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} + 2(x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} + (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} \right) + \\ & + \frac{1}{3!} \left((x - x_0)^3 \frac{\partial^3 f(M_0)}{\partial x^3} + 3(x - x_0)^2(y - y_0) \frac{\partial^3 f(M_0)}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\ & \left. + 3(x - x_0)(y - y_0)^2 \frac{\partial^3 f(M_0)}{\partial x \partial y^2} + (y - y_0)^3 \frac{\partial^3 f(M_0)}{\partial y^3} \right) + o(\rho^3), \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. $\square$

Замечание 1. В условиях теоремы полученное разложение с точностью до остаточного члена единственно (коэффициенты в многочлене Тейлора определяются однозначно).

Замечание 2. При $x_1^\circ = x_2^\circ = \dots = x_m^\circ = 0$ формула Тейлора называется *формулой Маклорена*.

Замечание 3. При разложении функций нескольких переменных по формуле Маклорена могут быть использованы разложения элементарных функций одной переменной:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$
- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (m \in \mathbb{R}).$

В частности, из последнего (*биномиального*) разложения имеем

$$\begin{aligned} \text{при } m = -1: \quad & \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n); \\ & \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n); \\ \text{при } m = \frac{1}{2}: \quad & \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots \\ & \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n), \quad n \geq 2; \\ \text{при } m = -\frac{1}{2}: \quad & \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \\ & \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Если m – натуральное число, то, начиная с члена, содержащего x^{m+1} , все коэффициенты равны нулю, ряд превращается в многочлен, и мы имеем классический бином Ньютона.

7.2 Практика разложения функций по формуле Тейлора

Существуют разные подходы к разложению функций многих переменных по формуле Тейлора. Ниже приведён пример, в котором наряду со стандартным способом разложения функции двух переменных по формуле Тейлора (многих переменных) использованы разложения по формуле Тейлора функций *одной переменной*.

Пример 126. [8, № 3587(a)] Разложить выражение $\frac{\cos x}{\cos y}$ по формуле Маклорена в окрестности точки $(0, 0)$ до членов 2-го порядка включительно с остаточным членом в форме Пеано.

Решение. 1-й способ (по формуле Тейлора для функций двух переменных). Имеем

$$f(x, y) = f(0, 0) + f'_x \cdot (x - 0) + f'_y \cdot (y - 0) + \\ + \frac{1}{2!} \left(f''_{x^2}(x - 0)^2 + 2f''_{xy}(x - 0)(y - 0) + f''_{y^2}(y - 0)^2 \right) + o(\rho^2),$$

где $\rho = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$, и все частные производные вычисляются в точке $(0, 0)$. Найдём частные производные:

$$f'_x = \left. \frac{-\sin x}{\cos y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0, \quad f'_y = \cos x \left. \frac{\operatorname{tg} y}{\cos y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0, \\ f''_{x^2} = \left. -\frac{\cos x}{\cos y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -1, \quad f''_{y^2} = \cos x \cdot \left. \frac{1 + \sin^2 y}{\cos^3 y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 1, \quad f''_{xy} = \left. \frac{-\sin x \sin y}{\cos^2 y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0.$$

Тогда получим

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 + \frac{1}{2}(-1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2) + o(\rho^2) = 1 - \frac{x^2 - y^2}{2} + o(x^2 + y^2).$$

2-й способ (с помощью стандартных разложений для функций одной переменной). Используя разложение для косинуса, а также представление $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + o(t^2)$, имеем

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)} = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right)^{-1} = \\ = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \left(1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}x^2y^2 + \\ + o(x^2) \cdot \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) - \frac{1}{2}x^2 \cdot o(y^2) + o(x^2) \cdot o(y^2) = 1 - \frac{x^2 - y^2}{2} + o(x^2 + y^2).$$

При этом слагаемые $o(x^2)$, $o(x^2) \cdot \frac{1}{2}y^2$, $o(y^2)$, $\frac{1}{2}x^2 \cdot o(y^2)$, $o(x^2) \cdot o(y^2)$ входят в $o(\rho^2) = o(x^2 + y^2)$. Покажем, например, что $\frac{1}{2}x^2 \cdot o(y^2) = o(x^2 + y^2)$. В самом деле, достаточно показать равенство нулю предела

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{1}{2}x^2 \cdot o(y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(xy \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot \frac{o(y^2)}{y^2} \right) = 0,$$

т. к. функция $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ ограничена ($\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$), $\frac{o(y^2)}{y^2} \rightarrow 0$, $xy \rightarrow 0$. $\square$

О применении формулы Тейлора при вычислении пределов функций. Как и в случае функций одной переменной, разложение функции в окрестности предельной точки по формуле Тейлора может быть использовано при вычислении пределов функций.

Пример 127. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow -1}} \frac{e^{\sin(xy)} - 1}{2x(x^2 + y^2)}$.

Решение. Поскольку $xy \rightarrow 0$, то $\sin(xy) \sim xy$, $e^{\sin(xy)} - 1 \sim xy$ и, следовательно,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow -1}} \frac{e^{\sin(xy)} - 1}{2x(x^2 + y^2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow -1}} \frac{xy}{2x(x^2 + y^2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow -1}} \frac{y}{2(x^2 + y^2)} = -\frac{1}{2}. \square$$

7.3 Условия разложения функции в ряд Тейлора

«Подобно тому как все искусства тяготеют к музыке, все науки стремятся к математике».

Д. Сантаяна (1863–1952), американский философ и писатель испанского происхождения.

Возможно ли точное (без остаточного члена) представление функции в окрестности заданной точки? Каким дополнительным условиям должна удовлетворять в этом случае функция? Опуская очевидный случай с алгебраическим многочленом, разлагаемым в конечную сумму по целым неотрицательным степеням, затронем тему разложения функции в степенные ряды (более подробно она изучается в разделе, посвящённом свойствам функциональных рядов).

Теорема 3 (разложение функции в ряд Тейлора в окрестности заданной точки). Если функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0 и $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(M) = 0$, то функция допускает представление в виде степенного ряда

$$f(M) = f(M_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left((x_1 - x_1^\circ) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^\circ) \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k \cdot f(M_0), \quad (1)$$

который называется *рядом Тейлора* для функции $f(M)$ в окрестности точки M_0 .¹

При $x_1^\circ = x_2^\circ = \dots = x_m^\circ = 0$ ряд Тейлора называется *рядом Маклорена*.

В частности, для функции двух переменных $f(x, y)$ ряд Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0) принимает вид (запишем в двух эквивалентных формах):

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^k \cdot f(x_0, y_0) =$$

¹Ряд Тейлора был известен задолго до публикаций Тейлора — его использовали ещё в XIV веке в Индии, а также в XVII веке Грегори и Ньютон.

$$= f(x_0, y_0) + \sum_{i+j \geq 1}^{+\infty} \frac{1}{i!j!} \cdot f_{x^i y^j}^{(i+j)}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^i (y - y_0)^j.$$

Подчеркнём, что представление функции $f(M)$ в окрестности заданной точки M_0 степенным рядом (Тейлора) *единственно*.

Пример 128. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $M(-1, 2, 0)$ функцию

$$f(x, y, z) = \frac{xy + y - 3x - 3}{z + 1}.$$

Решение. Приведя функцию к подходящему виду, осуществим разложение в степенной ряд по целым неотрицательным степеням $(x + 1)$, $(y - 2)$ и z (ряд Тейлора):

$$f(x, y, z) = \frac{(x + 1)((y - 2) - 1)}{1 + z} = (x + 1)((y - 2) - 1) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$$

(условия теоремы 3 выполнены). $\square$

Существуют ли другие (кроме использования формулы (1)) возможности для получения аппроксимации функций многочленами (рядами) Тейлора? Да, рассмотрим следующий пример.

Пример 129. Пусть требуется найти разложение в ряд Маклорена функции

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(xy^2).$$

Конечно, можно попытаться решить задачу стандартно, однако есть более простой способ. Заметим, что если продифференцировать по x эту функцию, то получим

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{arctg}(xy^2)) = \frac{y^2}{1 + x^2 y^4},$$

а эту функцию разложить в ряд проще. В самом деле, используя стандартное разложение $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$, справедливое при $|t| < 1$, находим

$$\frac{y^2}{1 + x^2 y^4} = y^2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^2 y^4)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} y^{4n+2}.$$

Если теперь проинтегрировать это равенство по переменной x (взять неопределённый интеграл), то получим

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot y^{4n+2} + C.$$

Для нахождения константы C вспомним, что $f(0, 0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$, откуда $C = 0$. $\square$

Замечание. Обоснование возможности почленного интегрирования степенных рядов будет изучаться позже в разделе «Интегралы, зависящие от параметра», но общую идею стоит запомнить уже сейчас.

7.4 Задачи для самостоятельного решения

Разложения функций двух переменных:

№357. [8, № 3581] Функцию

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$$

разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, -2)$.

№358. Функцию

$$f(x, y) = 2y^2 + x(y + 1) - 3y + 1$$

разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $B(1, 3)$.

№359. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $C(2, -1)$ функцию

$$f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4.$$

№360. Разложить функцию

$$z = uv^2 + 5u^2 + uv - 2v - 1$$

в окрестности точки $A(0, -1)$ по формуле Тейлора.

№361. Разложить в окрестности точки $A(1, -2)$ по формуле Тейлора функцию

$$z = -u^3 + 3uv - 2v + u - 1.$$

№362. Разложить функцию

$$f(x, y) = \cos(x + y^2)$$

по формуле Маклорена до членов 6-го порядка включительно с остаточным членом в форме Пеано.

№363. Разложить по целым неотрицательным степеням x и y до 6-го порядка включительно функцию

$$f(x, y) = \sqrt[3]{\cos(x^2 - y^2)}.$$

№364. Разложить по целым неотрицательным степеням x и y до 6-го порядка включительно (в окрестности точки $(0, 0)$) функцию

$$f(x, y) = \ln \cos(x^2 y).$$

№365. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(5, 2)$ до членов 3-го порядка включительно функцию

$$f(x, y) = \cos(x + y).$$

Найти $d^n f(x, y)$.

№366. Разложить функцию

$$z = \sin(xy + 1)$$

в окрестности точки $A(1, 0)$ по формуле Тейлора до членов 3-го порядка включительно с остаточным членом в форме Пеано.

№367. Разложить по формуле Тейлора функцию

$$f(x, y) = x \cdot \cos^2 y$$

в окрестности точки $P(-1, 0)$ до членов 2-го порядка включительно с остаточным членом в форме Лагранжа.

№368. Разложить по формуле Тейлора функцию

$$f(x, y) = x^2 \cdot \ln y$$

в окрестности точки $M(1, 1)$ до членов 2-го порядка включительно с остаточным членом в форме Лагранжа.

№369. [8, № 3585] В разложении функции

$$f(x, y) = x^y$$

в окрестности точки $A(1, 1)$ выписать члены до второго порядка включительно с остаточным членом в форме Лагранжа.

№370. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1, 1)$ до членов второго порядка включительно с остаточным членом в форме Пеано функцию

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

№371. [8, № 3587(б)] Вывести приближённую формулу с точностью до членов второго порядка для выражения

$$\operatorname{arctg} \frac{1+x+y}{1-x+y},$$

если $|x|$ и $|y|$ малы по сравнению с 1.

№372. Разложить по формуле Маклорена до 4-го порядка малости включительно функцию

$$f(x, y) = \ln(1 + \sin(x^4 + y^2)).$$

№373. Разложить по целым неотрицательным степеням x и y до 4-го порядка включительно функцию

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{1+xy}{1+x^2+y} \right).$$

Чему равна производная $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0)$?

№374. Разложить по целым неотрицательным степеням x и y до 4-го порядка включительно функцию

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

№375. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $A(e, -1)$ функцию

$$f(x, y) = \operatorname{ch}^2 \sqrt{(x + 2y)^2} - \operatorname{sh}^2(x + 2y).$$

№376. [8, № 3599] Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2).$$

№377. [8, № 3594] Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x, y) = \ln(1 + x + y).$$

№378. [8, № 3603] Написать разложение в ряд Тейлора функции $f(x, y) = \frac{x}{y}$ в окрестности точки $M(1, 1)$.

№379. [8, № 3602] Функцию e^{x+y} разложить в степенной ряд по целым положительным степеням биномов $x - 1$ и $y + 1$.

№380. Найти производную $\frac{\partial^{17} f(0, 0)}{\partial x^7 \partial y^{10}}$ для функции

$$f(x, y) = \sin(x^7 + y^5).$$

№381. [8, № 3601] Написать три члена разложения в ряд Маклорена функции, представленной интегралом

$$f(x, y) = \int_0^1 (1 + x)^{t^2 y} dt.$$

№382. Используя разложение по формуле Тейлора, найти предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x \sin y - y \sin x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

№383. Используя разложение по формуле Тейлора, доказать, что предел не существует:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x \sin y - y \sin x}{(x^2 + y^2)^2}.$$

№384. Используя разложение по формуле Тейлора, доказать, что предел не существует:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{x^6 + y^6}.$$

№385. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x + y^2) - \ln(1 + x - y^3)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

№386. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos \sqrt{x^2 + xy + y^2} - e^{-\frac{1}{2}(x^2 + xy + y^2)}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

№387. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1; 1)$ до членов 2-го порядка включительно неявную функцию $z(x, y)$, определяемую уравнением $z^3 + 3yz - 4x = 0$, если $z(1, 1) = 1$.

Разложения функций трёх переменных:

№388. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $B(-1, 2, 3)$ функцию

$$f(x, y, z) = 1 + x + y^2 + z^3.$$

№389. [8, № 3582] Функцию

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, 1, 1)$.

№390. [8, № 3588] Упростить выражение

$$\cos(x + y + z) - \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z,$$

считая x, y, z малыми по абсолютной величине.

№391. [10, с. 65] Разложить функцию

$$f(x, y, z) = \ln(xy + z)$$

по формуле Тейлора в окрестности точки $(1, 1, 1)$ до членов второго порядка включительно.

№392. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $A(1, 0, 0)$ функцию

$$f(x, y, z) = \sin(x - 1) + \sin(2y - z^2).$$

№393. [8, № 3245(a)] Заменяя приращение функции дифференциалом, приближённо вычислить

$$1,002 \cdot 2,003^2 \cdot 3,004^3.$$

7.5 Ответы и решения

357. Данная функция имеет непрерывные частные производные любого порядка (а значит, дифференцируема любое число раз). При этом, поскольку все частные производные порядка выше второго равны 0, то остаточный член $R_n(x, y) \equiv 0 \ \forall n \geq 2$, т. е. функцию (а это алгебраический многочлен 2-го порядка) можно разложить точно. Выпишем формулу Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, -2) + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k!} \left((x-1) \frac{\partial}{\partial x} + (y+2) \frac{\partial}{\partial y} \right)^k \cdot f(1, -2) = \\ &= f(1, -2) + (x-1) \frac{\partial f(1, -2)}{\partial x} + (y+2) \frac{\partial f(1, -2)}{\partial y} + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(1, -2)}{\partial x^2} (x-1)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f(1, -2)}{\partial x \partial y} (x-1)(y+2) + \frac{\partial^2 f(1, -2)}{\partial y^2} (y+2)^2 \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Найдём значение $f(A) = 5$, а также необходимые частные производные 1-го и 2-го порядков и вычислим их в точке A :

$$\begin{aligned} f'_x &= (4x - y - 6) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-2}} = 0, & f'_y &= (-x - 2y - 3) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-2}} = 0, \\ f''_{x^2} &= 4, & f''_{xy} &= -1, & f''_{y^2} &= -2. \end{aligned}$$

Подставив в (1), получим искомое разложение по целым неотрицательным степеням $(x-1)$ и $(y+2)$ (остаточный член равен нулю):

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 5 + \frac{1}{2} (4(x-1)^2 - 2(x-1)(y+2) - 2(y+2)^2) = \\ &= 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2. \end{aligned}$$

Это окончательный вид разложения, не надо здесь дальше раскрывать скобки (если только для проверки) – вы получите исходный многочлен!

358. Согласно формуле Тейлора, функцию $f(x, y)$ в окрестности точки B можно представить в виде

$$f(x, y) = f(B) + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k!} \left((x-1) \frac{\partial}{\partial x} + (y-3) \frac{\partial}{\partial y} \right)^k \cdot f(B),$$

причём остаточный член $R_2(x, y)$ тождественно равен 0 из-за обнуления всех частных производных, начиная с 3-го порядка. Найдём значение $f(B) = 14$, а также частные производные 1-го и 2-го порядков и вычислим их в точке B :

$$f'_x = (y+1) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=3}} = 4, \quad f'_y = (4y+x-3) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=3}} = 10,$$

$$f''_{x^2} = 0, \quad f''_{xy} = 1, \quad f''_{y^2} = 4.$$

Тогда получаем искомое разложение

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, 3) + (x - 1) \cdot f'_x(1, 3) + (y - 3) \cdot f'_y(1, 3) + \\ &+ \frac{1}{2!} (f''_{xx}(1, 3)(x - 1)^2 + 2 \cdot f''_{xy}(1, 3)(x - 1)(y - 3) + f''_{yy}(1, 3)(y - 3)^2) = \\ &= 14 + 4(x - 1) + 10(y - 3) + \frac{1}{2} (2(x - 1)(y - 3) + 4(y - 3)^2) = \\ &= 14 + 4(x - 1) + 10(y - 3) + (x - 1)(y - 3) + 2(y - 3)^2. \end{aligned}$$

359. Имеем $f(2, -1) = 2$. Вычислим последовательно частные производные данной функции:

$$f'_x(x, y) = (3x^2 - 10x - y + 10) \Big|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = 3, \quad f'_y(x, y) = (-x + 2y + 5) \Big|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = 1,$$

$$f''_{x^2}(x, y) = (6x - 10) \Big|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = 2, \quad f''_{xy}(x, y) = -1, \quad f''_{y^2}(x, y) = 2, \quad f'''_{x^3}(x, y) = 6.$$

Все остальные частные производные 3-го порядка, а также высших порядков равны нулю. Поэтому в окрестности точки C имеем для функции следующее точное (остаточный член равен 0) разложение

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(C) + \frac{1}{1!} \left((x - 2) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_C + (y + 1) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_C \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left((x - 2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_C + 2(x - 2)(y + 1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_C + (y + 1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_C \right) \\ &+ \frac{1}{3!} \left((x - 2)^3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_C + 3(x - 2)^2(y + 1) \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \Big|_C + \right. \\ &+ 3(x - 2)(y + 1)^2 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Big|_C + (y + 1)^3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_C \Big) = 2 + 3(x - 2) + \\ &+ (y + 1) + \frac{1}{2} (2(x - 2)^2 - 2(x - 2)(y + 1) + 2(y + 1)^2) + \frac{1}{6} \cdot 6(x - 2)^3 = \\ &= 2 + 3(x - 2) + (y + 1) + (x - 2)^2 - (x - 2)(y + 1) + (y + 1)^2 + (x - 2)^3. \end{aligned}$$

360. Имеем $z(0, -1) = 1$,

$$z'_u = (v^2 + 10u + v) \Big|_{\substack{u=0 \\ v=-1}} = 0, \quad z'_v = (2uv - 2 + u) \Big|_{\substack{u=0 \\ v=-1}} = -2,$$

$$z''_{u^2} = 10, \quad z''_{uv} = (2v + 1) \Big|_{\substack{u=0 \\ v=-1}} = -1, \quad z''_{v^2} = (2u) \Big|_{\substack{u=0 \\ v=-1}} = 0,$$

$$z'''_{u^3} = 0, \quad z'''_{u^2v} = 0, \quad z'''_{uv^2} = 2, \quad z'''_{v^3} = 0,$$

производные более высоких порядков равны 0. Согласно формуле Тейлора для функции двух переменных, в окрестности точки A имеем точное разложение

$$\begin{aligned} z(u, v) &= z(A) + \frac{1}{1!} \left((u-0) \frac{\partial z(A)}{\partial u} + (v+1) \frac{\partial z(A)}{\partial v} \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left((u-0)^2 \frac{\partial^2 z(A)}{\partial u^2} + 2(u-0)(v+1) \frac{\partial^2 z(A)}{\partial u \partial v} + (v+1)^2 \frac{\partial^2 z(A)}{\partial v^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{3!} \left((u-0)^3 \frac{\partial^3 z(A)}{\partial u^3} + 3(u-0)^2(v+1) \frac{\partial^3 z(A)}{\partial u^2 \partial v} + \right. \\ &\quad \left. + 3(u-0)(v+1)^2 \frac{\partial^3 z(A)}{\partial u \partial v^2} + (v+1)^3 \frac{\partial^3 z(A)}{\partial v^3} \right) = \\ &= 1 + (u \cdot 0 + (v+1) \cdot (-2)) + \frac{1}{2} (u^2 \cdot 10 + 2u(v+1)(-1) + (v+1)^2 \cdot 0) + \\ &+ \frac{1}{6} (u^3 \cdot 0 + 3u^2(v+1) \cdot 0 + 3u(v+1)^2 \cdot 2 + (v+1)^3 \cdot 0) = \\ &= 1 - 2(v+1) + 5u^2 - u(v+1) + u(v+1)^2. \end{aligned}$$

361. Имеем $z(1, -2) = -3$,

$$z'_u = (-3u^2 + 3v + 1) \Big|_{\substack{u=1 \\ v=-2}} = -8, \quad z'_v = (3u - 2) \Big|_{\substack{u=1 \\ v=-2}} = 1,$$

$$z''_{u^2} = -6u \Big|_{\substack{u=1 \\ v=-2}} = -6, \quad z''_{uv} = 3, \quad z''_{v^2} = 0,$$

$$z'''_{u^3} = -6, \quad z'''_{u^2v} = 0, \quad z'''_{uv^2} = 0, \quad z'''_{v^3} = 0,$$

производные более высоких порядков равны 0. Согласно формуле Тейлора для функции двух переменных, в окрестности точки A имеем точное разложение (остаточный член равен 0):

$$\begin{aligned} z(u, v) &= z(A) + \frac{1}{1!} \left((u-1) \frac{\partial z(A)}{\partial u} + (v+2) \frac{\partial z(A)}{\partial v} \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left((u-1)^2 \frac{\partial^2 z(A)}{\partial u^2} + 2(u-1)(v+2) \frac{\partial^2 z(A)}{\partial u \partial v} + (v+2)^2 \frac{\partial^2 z(A)}{\partial v^2} \right) \\ &+ \frac{1}{3!} \left((u-1)^3 \frac{\partial^3 z(A)}{\partial u^3} + 3(u-1)^2(v+2) \frac{\partial^3 z(A)}{\partial u^2 \partial v} + \right. \\ &\quad \left. + 3(u-1)(v+2)^2 \frac{\partial^3 z(A)}{\partial u \partial v^2} + (v+2)^3 \frac{\partial^3 z(A)}{\partial v^3} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -3 + ((u-1) \cdot (-8) + (v+2) \cdot 1) + \\
&+ \frac{1}{2} ((u-1)^2 \cdot (-6) + 2(u-1)(v+2) \cdot 3 + (v+2)^2 \cdot 0) + \\
&+ \frac{1}{6} ((u-1)^3 \cdot (-6) + 3(u-1)^2(v+2) \cdot 0 + 3(u-1)(v+2)^2 \cdot 0 + (v+2)^3 \cdot 0) = \\
&= -3 - 8(u-1) + (v+2) - 3(u-1)^2 + 3(u-1)(v+2) - (u-1)^3.
\end{aligned}$$

362. Пусть $t = x + y^2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$. Воспользуемся стандартным разложением функции 1-й переменной по формуле Маклорена:

$$\begin{aligned}
\cos t &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + o(t^6) = \\
&= 1 - \frac{(x+y^2)^2}{2!} + \frac{(x+y^2)^4}{4!} - \frac{(x+y^2)^6}{6!} + o((x+y^2)^6),
\end{aligned}$$

где $o((x+y^2)^6) = o(\rho^6)$. При необходимости можно было бы привести это разложение к стандартному виду.

363. Имеем: $\cos(x^2 - y^2) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^2 + o(\rho^6)$. Согласно биномиальному разложению $(1+t)^m = 1 + mt + o(t)$, при $m = \frac{1}{3}$ и $t = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2)^2 + o(\sqrt{x^2 + y^2}^6)$ получим в окрестности $(0, 0)$

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+t} &= 1 + \frac{t}{3} + o(t) = 1 - \frac{1}{6}(x^2 - y^2)^2 + o(\rho^6) = \\
&= 1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^2y^2 - \frac{1}{6}y^4 + o((x^2 + y^2)^3).
\end{aligned}$$

364. Поскольку при $p \rightarrow 0$ имеем $\cos p = 1 - \frac{1}{2}p^2 + o(p^2)$, то $\ln \cos(x^2y) = \ln(1 - \frac{1}{2}x^4y^2 + o(\rho^6))$. Далее, при $t \rightarrow 0$ имеем разложение $\ln(1+t) = t + o(t)$ с $t = -\frac{1}{2}(x^4y^2) + o(\sqrt{x^2 + y^2}^6)$. Тогда в окрестности $(0, 0)$ получим

$$\ln \cos(x^2y) = \ln(1 - \frac{1}{2}x^4y^2 + o((x^2 + y^2)^3)) = -\frac{1}{2}x^4y^2 + o((x^2 + y^2)^3).$$

365. Имеем: $f(5, 2) = \cos 7$. Найдём частные производные:

$$f'_x = f'_y = -\sin(x+y)|_{\substack{x=5 \\ y=2}} = -\sin 7,$$

$$f''_{x^2} = f''_{y^2} = f''_{xy} = -\cos(x+y)|_{\substack{x=5 \\ y=2}} = -\cos 7,$$

$$f'''_{xxx} = f'''_{xxy} = f'''_{xyy} = f'''_{yyy} = \sin(x+y)|_{\substack{x=5 \\ y=2}} = \sin 7.$$

Тогда по формуле Тейлора в окрестности точки A получим:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(5, 2) + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k!} \left((x-5) \frac{\partial}{\partial x} + (y-2) \frac{\partial}{\partial y} \right)^k \cdot f(5, 2) = \\ &= \cos 7 - \sin 7((x-5) + (y-2)) - \frac{1}{2!} \cos 7((x-5)^2 + 2(x-5)(y-2) + (y-2)^2) + \\ &\quad + \frac{1}{3!} \sin 7((x-5)^3 + 3(x-5)^2(y-2) + 3(x-5)(y-2)^2 + (y-2)^3) + o(\rho^3), \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2}$. Положим $t = x + y$ и, поскольку t зависит от x, y линейным образом, то для функции $f(t) = \cos t$ справедлива формула для нахождения дифференциала n -го порядка:

$$d^n f(t) = f^{(n)}(t) dt^n, \quad \text{или} \quad d^n(\cos t) = (\cos t)^{(n)} dt^n,$$

$$\text{т. е.} \quad d^n(\cos t) = (\cos(x+y))^{(n)} (dx + dy)^n = \cos\left(x+y + \frac{\pi n}{2}\right) \sum_{k=0}^n C_n^k dx^k dy^{n-k}.$$

366. В точке (x, y) из окрестности $(1, 0)$ имеем

$$z(x, y) = z(1, 0) + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k!} \left((x-1) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)^k \cdot f(1, 0) + o(\rho^3),$$

где $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Найдём в данной точке значение функции и её частных производных до 3-го порядка включительно:

$$z(1, 0) = \sin 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy+1) \cdot y \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos(xy+1) \cdot x \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = \cos 1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2(-\sin(xy+1)) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2(-\sin(xy+1)) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = -\sin 1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-\sin(xy+1)xy + \cos(xy+1)) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = \cos 1,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y^3(-\cos(xy+1)) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 0, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -x^3 \cos(xy+1) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = -\cos 1,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (2y(-\sin(xy+1)) + xy^2(-\cos(xy+1))) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = (2x(-\sin(xy+1)) + x^2 y(-\cos(xy+1))) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = -2 \sin 1.$$

Подставив в формулу Тейлора, окончательно получим

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \sin 1 + \cos 1 \cdot y + \frac{1}{2!} (0 \cdot (x-1)^2 + 2 \cos 1 (x-1)y + (-\sin 1)y^2) + \\ &+ \frac{1}{3!} (0 \cdot (x-1)^3 + 3 \cdot 0 \cdot (x-1)^2 y + 3(-2 \sin 1)(x-1)y^2 + (-\cos 1)y^3) + \\ &+ o(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}^3) = \sin 1 + \cos 1 \cdot y + \cos 1 \cdot (x-1)y - \frac{1}{2} \sin 1 \cdot y^2 - \\ &- \sin 1 \cdot (x-1)y^2 - \frac{1}{6} \cos 1 \cdot y^3 + R_3, \quad \text{где } R_3 = o(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}^3). \end{aligned}$$

367. Вычислим в точке P значение функции и её производных до второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} f(-1, 0) &= -1, \quad f'_x = \cos^2 y \Big|_{(-1, 0)} = 1, \quad f'_y = -x \sin 2y \Big|_{(-1, 0)} = 0, \\ f''_{xx} &= 0, \quad f''_{yy} = -2x \cos 2y \Big|_{(-1, 0)} = 2, \quad f''_{xy} = -\sin 2y \Big|_{(-1, 0)} = 0. \end{aligned}$$

Согласно формуле Тейлора имеем:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= f(-1, 0) + \frac{1}{1!} ((x+1) \cdot 1 + (y-0) \cdot 0) + \\ &+ \frac{1}{2!} ((x+1)^2 \cdot 0 + 2 \cdot (x+1)(y-0) \cdot 0 + (y-0)^2 \cdot 2) + R_2(x, y) = \\ &= -1 + (x+1) + y^2 + R_2(x, y). \end{aligned}$$

Здесь остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} R_2(x, y) &= \frac{1}{3!} ((x+1)^3 \cdot f'''_{xxx}(P') + 3(x+1)^2 y \cdot f'''_{xxy}(P') + \\ &+ 3(x+1)y^2 \cdot f'''_{xyy}(P') + y^3 \cdot f'''_{yyy}(P')) , \end{aligned}$$

где точка $P'(-1 + \theta(x+1), \theta y)$, $0 < \theta < 1$, лежит на отрезке, соединяющем точку (x, y) с точкой $(-1, 0)$.

368. Вычислим в точке M значения функции и её производных до второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} f(M) &= 0, \quad f'_x = 2x \ln y \Big|_M = 0, \quad f'_y = \frac{x^2}{y} \Big|_M = 1, \\ f''_{xx} &= 2 \ln y \Big|_M = 0, \quad f''_{yy} = -\frac{x^2}{y^2} \Big|_M = -1, \quad f''_{xy} = \frac{2x}{y} \Big|_M = 2. \end{aligned}$$

Согласно формуле Тейлора, имеем:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, 1) + \frac{1}{1!} ((x-1) \cdot 0 + (y-1) \cdot 1) + \\ &+ \frac{1}{2!} ((x-1)^2 \cdot 0 + 2(x-1)(y-1) \cdot 2 + (y-1)^2 \cdot (-1)) + R_2(x, y) = \\ &= (y-1) + 2(x-1)(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + R_2(x, y). \end{aligned}$$

Здесь остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} R_2(x, y) &= \frac{1}{3!} ((x-1)^3 \cdot f'''_{xxx}(M') + 3(x-1)^2(y-1) \cdot f'''_{xxy}(M') + \\ &+ 3(x-1)(y-1)^2 \cdot f'''_{xyy}(M') + (y-1)^3 \cdot f'''_{yyy}(M')) , \end{aligned}$$

где точка $M'(1+\theta(x-1), 1+\theta(y-1))$, $0 < \theta < 1$, лежит на отрезке, соединяющем точку (x, y) с точкой $(1, 1)$.

369. Возьмём дифференциальную форму формулы Тейлора

$$f(M) = f(A) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot d^k f(A) + R_n(M),$$

где $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, $R_n(M) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot d^{n+1} f(x_0 + \Theta dx, y_0 + \Theta dy)$.

Имеем, при $n = 2$ для любой точки $M(x, y)$ из окрестности $A(1, 1)$ найдётся $0 < \Theta < 1$:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (y \cdot x^{y-1} dx + x^y \cdot \ln x \cdot dy) \Big|_{(1,1)} = dx.$$

2) Найдём

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y) &= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial y^2} dy^2 \right) = \\ &= (y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2} dx^2 + 2(1+y \ln x) x^{y-1} dx dy + x^y \cdot \ln^2 x \cdot dy^2) \Big|_{(1,1)} = 2 dx dy. \end{aligned}$$

3) Наконец, для остаточного члена найдём

$$\begin{aligned} d^3 f(x, y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3 = \\ &= y(y-1)(y-2) x^{y-3} dx^3 + 3(2y-1+y(y-1) \ln x) x^{y-2} dx^2 dy + \\ &+ 3(y \ln^2 x + 2 \ln x) x^{y-1} dx dy^2 + x^y \ln^3 x dy^3. \end{aligned}$$

В результате имеем искомое разложение по формуле Тейлора:

$$f(x, y) = 1 + dx + dxdy + R_2(x, y),$$

где $dx = x - 1$, $dy = y - 1$, $R_2(x, y) = \frac{1}{3!}d^3f(1 + \Theta dx, 1 + \Theta dy)$, $0 < \Theta < 1$.

370. Вычислим в заданной точке $A(1, 1)$ значения функции и её производных до второго порядка включительно: $f(1, 1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$,

$$f'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_A = -\frac{1}{2}, \quad f'_y = \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_A = \frac{1}{2},$$

$$f''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_A = \frac{1}{2}, \quad f''_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_A = -\frac{1}{2}, \quad f''_{xy} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_A = 0.$$

Тогда согласно формуле Тейлора имеем:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, 1) + \frac{1}{1!} \left((x-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (y-1) \cdot \frac{1}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left((x-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 2(x-1)(y-1) \cdot 0 + (y-1)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right) + o(\rho^2) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(y-1)^2 + o(\rho^2), \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

371. Обозначим $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{1+x+y}{1-x+y}$, тогда по формуле Маклорена

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!}df(0, 0) + \frac{1}{2!}d^2f(0, 0) + R_2(x, y),$$

где $dx = x - 0$, $dy = y - 0$. Найдём:

$$1) f(0, 0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{2(1+y)dx - 2xdy}{(1-x+y)^2 + (1+x+y)^2} \Big|_{(0,0)} = dx.$$

2) Найдём

$$\begin{aligned} d^2f(x, y) &= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy^2 \right) = \\ &= \frac{-(2(1+y)dx - 2xdy)(2(1-x+y)(-dx + dy) + 2(1+x+y)(dx + dy))}{((1-x+y)^2 + (1+x+y)^2)^2}. \end{aligned}$$

Тогда $d^2 f(0, 0) = -2dxdy$. Окончательно,

$$f(x, y) \approx \frac{\pi}{4} + dx + \frac{1}{2}(-2dxdy) = \frac{\pi}{4} + x - xy.$$

372. Имеем при $t \rightarrow 0$: $\sin t = t + o(t^2) \Rightarrow$ при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$

$$\sin(x^4 + y^2) = x^4 + y^2 + o((x^4 + y^2)^2).$$

При $k \rightarrow 0$ имеем $\ln(1 + k) = k - \frac{k^2}{2} + o(k^2) \Rightarrow$

$$\ln(1 + \sin t) = \sin t - \frac{\sin^2 t}{2} + o(\sin^2 t).$$

Тогда в окрестности точки $(0, 0)$ получаем

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sin(x^4 + y^2)) &= \sin(x^4 + y^2) - \frac{\sin^2(x^4 + y^2)}{2} + o((x^4 + y^2)^2) = \\ &= x^4 + y^2 - \frac{(x^4 + y^2)^2}{2} + o((x^4 + y^2)^2) = y^2 + x^4 - \frac{1}{2}y^4 + o(\rho^4), \text{ где } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

373. Представляя функцию в виде $f(x, y) = \ln(1 + xy) - \ln(1 + x^2 + y^2)$ и используя разложение $\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$, получим

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left(xy - \frac{(xy)^2}{2} + o(\rho^4) \right) - \\ &- \left((x^2 + y^2) - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} + \frac{(x^2 + y^2)^3}{3} - \frac{(x^2 + y^2)^4}{4} + o(\rho^4) \right) = \\ &= -y + xy - x^2 + \frac{y^2}{2} + x^2y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{x^4}{2} + o(\rho^4), \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Чтобы найти производную $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0)$, вспомним, что в формуле Маклорена коэффициент при y^3 равен $\frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0)$, а с другой стороны, в полученном разложении коэффициент при y^3 равен $(-1/3)$. Приравнявая эти коэффициенты (в силу единственности разложения), находим искомую частную производную: $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0) = -2$.

374. Представляя функцию в виде $f(x, y) = \ln(1 + xy) - \ln(1 + x^2 + y^2)$ и используя разложение $\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$, получим

$$f(x, y) = \left(xy - \frac{(xy)^2}{2} + o(\rho^4) \right) - \left((x^2 + y^2) - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} + o(\rho^4) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= xy - x^2 - y^2 - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} + o((x^2 + y^2)^2) = \\
&= xy - x^2 - y^2 + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} + o((x^2 + y^2)^2).
\end{aligned}$$

375. Вначале упростим функцию. В силу чётности гиперболического косинуса имеем $\operatorname{ch}^2 |x + 2y| = \operatorname{ch}^2(x + 2y)$. Далее, согласно основному гиперболическому тождеству $\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1$, получаем, что $f(x, y) \equiv 1$, а значит в любой точке (и в точке A) разложение в ряд Тейлора содержит только первый (и единственный) член разложения.

376. Используя известное разложение для синуса

$$\sin t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad t \in \mathbb{R},$$

получаем при $t = x^2 + y^2$ искомое разложение в ряд Маклорена

$$\sin(x^2 + y^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x^2 + y^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x^2 + y^2 < +\infty.$$

377. Так как

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + o(t^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n},$$

то

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot x^m y^{n-m} = \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{m!(n-m)!} \cdot x^m y^{n-m}, \quad \text{где } |x+y| < 1.
\end{aligned}$$

378. Представим функцию в виде $f(x, y) = \frac{1 + (x-1)}{1 + (y-1)}$. Заметим, что числитель дроби уже является разложением по формуле Тейлора. Чтобы разложить знаменатель, воспользуемся представлением

$$\frac{1}{1 + (y-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (y-1)^n$$

(ряд сходится, т. е. сумма конечна, при $|y-1| < 1$). Тогда, подставляя, получим

$$f(x, y) = (1 + (x-1)) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (y-1)^n,$$

где $|x| < +\infty$, $0 < y < 2$.

379. Поскольку степенной ряд является рядом Тейлора для функции $f(x, y)$ в окрестности точки $(1, -1)$, то

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, -1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left((x-1) \frac{\partial}{\partial x} + (y+1) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \cdot f(1, -1) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left((x-1) \frac{\partial}{\partial x} + (y+1) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \cdot f(1, -1) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} (x-1)^m (y+1)^{n-m} \cdot \frac{\partial^n f(1, -1)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} = \end{aligned}$$

(т. к. частная производная любого порядка для данной функции равна $\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} = e^{x+y} \Big|_{(1, -1)} = 1$)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!(n-m)!} (x-1)^m (y+1)^{n-m}.$$

380. Разложим функцию по формуле Маклорена до членов 17-го порядка включительно. Обозначим $t = x^7 + y^5$ и воспользуемся разложением для синуса в окрестности $(0, 0)$:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots$$

Подставляя вместо t выражение $x^7 + y^5$, получим

$$\sin(x^7 + y^5) = x^7 + y^5 - \frac{(x^7 + y^5)^3}{3!} + \frac{(x^7 + y^5)^5}{5!} + \dots$$

Оставим только члены до 17-го порядка, отбросив заведомо более высокие степени:

$$\begin{aligned} \sin(x^7 + y^5) &= x^7 + y^5 - \frac{(x^7 + y^5)^3}{3!} + \dots = \\ &= x^7 + y^5 - \frac{1}{6} (x^{21} + 3x^{14}y^5 + 3x^7y^{10} + y^{15}) + \dots = \\ &= x^7 + y^5 - \frac{1}{6} (3x^{14}y^5 + 3x^7y^{10} + y^{15}) + \dots \end{aligned}$$

Видно, что коэффициент при x^7y^{10} равен $(-\frac{1}{2})$. Но с другой стороны, этот же коэффициент может быть определён из вида соответствующего члена разложения по формуле Тейлора: $\frac{1}{17!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{17} \cdot f(0, 0)$. Привлекая бином

Ньютона, имеем

$$(a + b)^{17} = \sum_{l=0}^{17} C_{17}^l a^{17-l} b^l.$$

Нужный нам член имеет вид (при $l = 10$) $C_{17}^{10} a^7 b^{10}$, т. е., возвращаясь к производным,

$$\frac{1}{17!} \cdot C_{17}^{10} \cdot \frac{\partial^{17} f(0, 0)}{\partial x^7 \partial y^{10}} \cdot x^7 y^{10}.$$

В силу единственности разложения по формуле Тейлора (Маклорена), мы имеем право приравнять коэффициенты при $x^7 y^{10}$: $-\frac{1}{2} = \frac{1}{17!} \cdot C_{17}^{10} \cdot \frac{\partial^{17} f(0, 0)}{\partial x^7 \partial y^{10}}$,

откуда находим искомое значение производной: $\frac{\partial^{17} f(0, 0)}{\partial x^7 \partial y^{10}} = -\frac{17!}{2C_{17}^{10}} = -\frac{1}{2} 10! 7!$

381. Имеем определённый интеграл, зависящий от параметров x и y . Воспользуемся для подынтегральной функции биномиальным разложением $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + o(x^2)$, верным при достаточно малых x и любых $m \in \mathbb{R}$. Получим

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^1 \left(1 + t^2 yx + \frac{t^2 y(t^2 y - 1)}{2} x^2 + \dots \right) dt = \\ &= \left(t + \frac{1}{3} x y t^3 - \frac{1}{6} x^2 y t^3 + \dots \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{3} x y - \frac{1}{6} x^2 y + \dots \end{aligned}$$

382. Воспользуемся стандартными разложениями $\sin x$ и $\sin y$:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x \sin y - y \sin x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x(y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)) - y(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{xy}{6}(x^2 - y^2) + o(\rho^4)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{где } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Переходя к совмещённым полярным координатам, получим

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{\frac{1}{24} r^4 \sin 4\varphi + o(r^4)}{r^3} = 0.$$

383. Воспользуемся разложениями $\sin x$ и $\sin y$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x \sin y - y \sin x}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x(y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)) - y(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{xy}{6}(x^2 - y^2) + o(\rho^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{где } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Переходя к совмещённым полярным координатам, получим

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{\frac{1}{24}r^4 \sin 4\varphi + o(r^4)}{r^4} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \left(\frac{1}{24} \sin 4\varphi + o(1) \right).$$

Значение данного предела существенным образом зависит от φ , что доказывает, что предел не существует.

384. Воспользуемся разложением $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ при $t \rightarrow 0$, а затем перейдём к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{x^6 + y^6} &= \frac{1}{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^3 + y^3)^2}{x^6 + y^6} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^3 + y^3)^2}{(x^3 + y^3)^2 - 2x^3y^3} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \forall \varphi(r)}} \frac{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2 - 2 \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi}. \end{aligned}$$

Значение предела зависит от φ . Это означает, что предел не существует.

385. Найдём частные производные:

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1 + x)}{x|x|} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2} + o(x)}{|x|}. \end{aligned}$$

Раскрывая модуль, получаем, что данный предел (т. е. частная производная $f'_x(0, 0)$) не существует. Следовательно, функция не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

386. Найдём частные производные:

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos |x| - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3|x|} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4))}{x^3|x|} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^3|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}) + o(x)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{12} + o(x)}{|x|}, \end{aligned}$$

однако данный предел не существует. Следовательно, не существует частная производная $f'_x(0, 0)$. Это означает, что функция f не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

387. Для решения данной задачи необходимо умение вычислять дифференциалы (частные производные) неявно заданных функций.

1) Найдём частные производные 1-го порядка. Для этого возьмём дифференциал от левой и правой частей уравнения:

$$d(z^3 + 3yz - 4x) = 0 \Leftrightarrow 3z^2 dz + 3(z dy + y dz) - 4dx = 0,$$

откуда находим $dz = \frac{4}{3z^2 + 3y} dx - \frac{z}{z^2 + y} dy$, следовательно, частные производные берём как коэффициенты при dx и dy :

$$z'_x = \frac{4}{3z^2 + 3y} \Big|_{(1,1)} = \frac{2}{3}, \quad z'_y = -\frac{z}{z^2 + y} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{2}.$$

2) Найдём частные производные 2-го порядка. Для этого вычислим 2-й дифференциал, взяв ещё раз дифференциал от левой и правой частей равенства $3z^2 dz + 3(z dy + y dz) - 4dx = 0$ (при повторном дифференцировании дифференциалы независимых переменных dx и dy воспринимаем как константы):

$$d(3z^2 dz + 3(z dy + y dz) - 4dx) = 0 \Leftrightarrow$$

$$d(3z^2) dz + 3z^2 d^2 z + 3(dz dy + z d^2 y + dy dz + y d^2 z) - 4d^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

(поскольку в силу независимости переменных x и y имеем $d^2 x = d^2 y = 0$)

$$6z dz^2 + 3z^2 d^2 z + 3(2dy dz + y d^2 z) = 0 \Leftrightarrow d^2 z = -\frac{2z dz^2 + 2dy dz}{z^2 + y}.$$

Далее надо подставить в полученное выражение для второго дифференциала найденное выше выражение для dz , упростить и привести к стандартному виду:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Тогда в качестве коэффициентов при dx^2 , $2dx dy$, dy^2 вы найдёте все необходимые частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и вычислите их значения в точке $(1, 1)$. После этого можно выписать формулу Тейлора.

Ответ: $z(x, y) = 1 + \frac{2}{3}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) - \frac{2}{9}(x - 1)^2 - \frac{1}{8}(y - 1)^2 + o(\rho^2)$, где $\rho = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$.

388. Данная функция имеет непрерывные частные производные любого порядка (а значит, дифференцируема любое число раз). При этом, поскольку все частные производные порядка выше 3-го равны 0, то остаточный член $R_n(x, y) \equiv 0 \forall n \geq 3$, т. е. функцию (а это алгебраический многочлен 3-го порядка) можно разложить точно. Имеем: $u(B) = 31$. Производные 1-го порядка:

$$u'_x = 1, \quad u'_y = 2y \Big|_B = 4, \quad u'_z = 3z^2 \Big|_B = 27.$$

Производные 2-го порядка равны 0, кроме $u''_{yy} = 2$, $u''_{zz} = 6z \Big|_B = 18$. Все производные 3-го порядка равны 0, кроме $u'''_{zzz} = 6$. Итак, по формуле Тейлора в окрестности B имеем:

$$\begin{aligned} u(M) &= u(B) + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k!} \left((x+1) \frac{\partial}{\partial x} + (y-2) \frac{\partial}{\partial y} + (z-3) \frac{\partial}{\partial z} \right)^k \cdot u = \\ &= 31 + (x+1) + 4(y-2) + 27(z-3) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (2(y-2)^2 + 18(z-3)^2) + \frac{1}{6} (6(z-3)^3) = \\ &= 31 + (x+1) + 4(y-2) + 27(z-3) + (y-2)^2 + 9(z-3)^2 + (z-3)^3. \end{aligned}$$

389. Данная функция имеет непрерывные частные производные любого порядка (а значит, дифференцируема любое число раз). При этом, поскольку все частные производные порядка выше 3-го равны 0, то остаточный член $R_n(x, y) \equiv 0 \ \forall n \geq 3$, т. е. функцию (а это алгебраический многочлен 3-го порядка) можно разложить точно. Выпишем формулу Тейлора в точке M из окрестности A в дифференциальной форме:

$$f(M) = f(A) + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k!} \cdot d^k f(A) = f(A) + \frac{1}{1!} df(A) + \frac{1}{2!} d^2 f(A) + \frac{1}{3!} d^3 f(A),$$

где $dx = x - 1$, $dy = y - 1$, $dz = z - 1$. Вычислим в точке A значение функции и её производных:

$$f(A) = 0, \quad f'_x = (3x^2 - 3yz) \Big|_A = 0 \Rightarrow f'_y(A) = f'_z(A) = 0,$$

$$f''_{xx} = 6x \Big|_A = 6, \Rightarrow f''_{yy} = f''_{zz} = 6,$$

$$f''_{xy} = -3z \Big|_A = -3, \Rightarrow f''_{xz} = f''_{yz} = \dots = -3,$$

$$f'''_{xxx} = 6 \Big|_A = 6 \Rightarrow f'''_{yyy} = f'''_{zzz} = 6,$$

$$f'''_{xxy} = 0 \Rightarrow f'''_{xyy} = f'''_{xxz} = f'''_{xzz} = f'''_{yyz} = \dots = f'''_{yzz} = 0,$$

$$f'''_{xyz} = -3 \Rightarrow f'''_{yzx} = \dots = f'''_{yxz} = -3.$$

Тогда для дифференциалов имеем

$$df(A) = (x-1)f'_x(A) + (y-1)f'_y(A) + (z-1)f'_z(A) = 0,$$

$$d^2 f(A) = f''_{xx}(A)(x-1)^2 + f''_{yy}(A)(y-1)^2 + f''_{zz}(A)(z-1)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +2f''_{xy}(A)(x-1)(y-1) + 2f''_{xz}(A)(x-1)(z-1) + 2f''_{yz}(A)(y-1)(z-1) = \\
& = 6(x-1)^2 + 6(y-1)^2 + 6(z-1)^2 - \\
& - 6(x-1)(y-1) - 6(x-1)(z-1) - 6(y-1)(z-1).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание формулу $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$ и специфику производных 3-го порядка (обнуление большей части из них), для 3-го дифференциала получим (члены с нулевыми производными опущены):

$$\begin{aligned}
d^3 f(A) &= f'''_{xxx}(A)(x-1)^3 + f'''_{yyy}(A)(y-1)^3 + f'''_{zzz}(A)(z-1)^3 + \\
& + 3f'''_{xyz}(A)(x-1)(y-1)(z-1) = \\
& = 6(x-1)^3 + 6(y-1)^3 + 6(z-1)^3 + 6(-3)(x-1)(y-1)(z-1).
\end{aligned}$$

Подставляя в формулу Тейлора, окончательно получим

$$\begin{aligned}
f(M) &= 0 + \frac{1}{1!} \cdot 0 + \frac{1}{2!}(6(x-1)^2 + 6(y-1)^2 + 6(z-1)^2 - \\
& - 6(x-1)(y-1) - 6(x-1)(z-1) - 6(y-1)(z-1)) + \\
& + \frac{1}{3!}(6(x-1)^3 + 6(y-1)^3 + 6(z-1)^3 - 18(x-1)(y-1)(z-1)) = \\
& = 3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 3(z-1)^2 - \\
& - 3(x-1)(y-1) - 3(x-1)(z-1) - 3(y-1)(z-1) + \\
& + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1).
\end{aligned}$$

390. Используя формулу Маклорена для $\cos t$, имеем

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \cos y \approx 1 - \frac{y^2}{2}, \quad \cos z \approx 1 - \frac{z^2}{2},$$

$\cos(x+y+z) \approx 1 - \frac{1}{2}(x+y+z)^2$. Тогда $\cos(x+y+z) - \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \approx$

$$\begin{aligned}
& \approx 1 - \frac{1}{2}(x+y+z)^2 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2}\right) = \\
& = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + xz + yz) - 1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \\
& - \frac{1}{4}(x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2) + \frac{1}{8}x^2 y^2 z^2 \approx -(xy + xz + yz)
\end{aligned}$$

(отбрасывая величины выше второго порядка малости).

391. Ответ: $f(x, y, z) = \ln 2 + \frac{1}{2}((x-1) + (y-1) + (z-1)) -$

$$-\frac{1}{8}((x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 -$$

$$-2(x-1)(y-1) + 2(x-1)(z-1) + 2(y-1)(z-1)) + o(\rho^2),$$

где $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$.

392. Используя известное разложение для синуса

$$\sin t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad t \in \mathbb{R},$$

получаем при $t = x-1$ и $t = 2y - z^2$ искомое разложение по целым неотрицательным степеням $(x-1)$, y и z (в ряд Тейлора):

$$\begin{aligned} \sin(x-1) + \sin(2y - z^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2y - z^2)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} ((x-1)^{2n-1} + (2y - z^2)^{2n-1}). \end{aligned}$$

393. Рассмотрим функцию $f(x, y, z) = (1+x)(2+y)^2(3+z)^3$ и воспользуемся разложением по формуле Маклорена:

$$f(x, y, z) = f(0, 0, 0) + f'_x(0, 0, 0)x + f'_y(0, 0, 0)y + f'_z(0, 0, 0)z + o(\rho), \quad (1)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Возьмём $x = 0,002$, $y = 0,003$, $z = 0,004$ и вычислим:

$$f(0, 0, 0) = 108, \quad f'_x = (2+y)^2(3+z)^3 \Big|_{(0,0,0)} = 4 \cdot 27 = 108,$$

$$f'_y = (x+1)2(2+y)(3+z)^3 \Big|_{(0,0,0)} = 3^3 \cdot 2^2 = 108,$$

$$f'_z = (x+1)(2+y)^2 3(3+z)^2 \Big|_{(0,0,0)} = 4 \cdot 3 \cdot 9 = 108.$$

Подставим в (1):

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &\approx 108 + 108(x + y + z) = 108(1 + 0,002 + 0,003 + 0,004) = \\ &= 108 \cdot 1,009 = 108,972. \end{aligned}$$

8 СЕМИНАР: Локальные экстремумы функции многих переменных. Выпуклые функции

«Если теорему так и не смогли доказать, она становится аксиомой».

Евклид (III век до н. э.) – древнегреческий математик.

С целью защиты авторских прав
НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

8.1 Локальные и краевые экстремумы

Начнём с определений. Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ определена на некотором множестве D и $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$ – внутренняя точка этого множества.

Говорят, что функция m переменных $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет в точке M_0 *локальный максимум* (соответственно, *локальный минимум*), если существует окрестность $\rho(M, M_0) < \delta$ этой точки такая, что для любой точки M из указанной окрестности верно неравенство: $f(M) \leq f(M_0)$ (соответственно, $f(M) \geq f(M_0)$).

Если последние неравенства строгие (и выполняются для всех M из окрестности, отличных от M_0), то получим определения точки *строгого локального максимума* (соответственно, *строгого локального минимума*).

При этом *локальным максимумом* (*локальным минимумом*) называется значение функции $f(M_0)$ в точке локального максимума (соответственно, локального минимума).

Говорят, что функция m переменных $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$ *локальный экстремум*, если она имеет в этой точке либо локальный минимум, либо локальный максимум. *Локальным экстремумом* называется значение функции в точке локального экстремума.

Если экстремальная точка M_0 принадлежит границе множества D , то экстремум называют *краевым*.

Иначе говоря, точки локального экстремума – это точки, в окрестности которых приращение функции $\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0)$ сохраняет определённый знак:

$$\Delta f(M_0) > 0 \Leftrightarrow M_0 - \text{точка строгого локального минимума};$$

$$\Delta f(M_0) \geq 0 \Leftrightarrow M_0 - \text{точка нестрогого локального минимума};$$

$$\Delta f(M_0) < 0 \Leftrightarrow M_0 - \text{точка строгого локального максимума};$$

$$\Delta f(M_0) \leq 0 \Leftrightarrow M_0 - \text{точка нестрогого локального максимума}.$$

Пусть M_0 – внутренняя точка области определения функции f . Точка M_0 называется *критической точкой* функции f , если каждая из частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, m}$, в этой точке или не существует, или равна нулю. При этом точки M_0 , в которых все частные производные одновременно обращаются в нуль, принято называть *стационарными точками*.

При нахождении локальных экстремумов функций многих переменных, как и в случае с функциями одной переменной, вначале, используя необходимое условие, отбираются критические точки (точки возможного экстремума), а затем в каждой такой точке проверяется выполнение достаточного условия, гарантирующего, что экстремум в данной точке есть (или, наоборот, доказывающегося, что экстремума нет).

8.2 Необходимое условие локального экстремума

Теорема 1 (*необходимое условие локального экстремума, или многомерный аналог теоремы Ферма*). Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ локальный экстремум. Тогда если в этой точке существуют конечные частные производные первого порядка по всем переменным, то все эти частные производные равны нулю, т. е.

$$\begin{cases} f'_{x_1}(M_0) = 0, \\ f'_{x_2}(M_0) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f'_{x_m}(M_0) = 0. \end{cases}$$

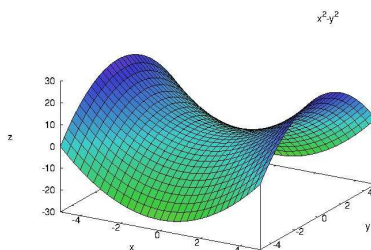
Приведём более слабую формулировку теоремы 1.

Теорема 1* (*необходимое условие локального экстремума, или теорема Ферма*). Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ определена в некоторой окрестности точки M_0 . Если функция f имеет в этой точке локальный экстремум и если в ней существует какая-либо из частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, m}$, то она равна нулю.¹

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i} = 0.$$

Следствие. Если функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема в точке M_0 локального экстремума, то её первый дифференциал в этой точке, так же как

¹Также имеет место следующая формулировка данной теоремы. Пусть M_0 — точка локального экстремума функции $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Если в этой точке существует производная по направлению вектора $\vec{l}$, то она равна нулю.

Рис. 4: Поверхность $z = x^2 - y^2$ с седловой точкой $(0, 0)$.

и её градиент, равны нулю:

$$df(M_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad \text{grad } f(M_0) = \vec{0}.$$

В общем случае, если в некоторой точке функция имеет локальный экстремум, то эта точка является критической точкой функции.

Подчеркнём, что обращение в нуль в точке M_0 всех частных производных первого порядка является *только необходимым* и не является достаточным условием локального экстремума дифференцируемой в этой точке M_0 функции.

Пример 130. Функция $z = xy$ (или $z = x^2 - y^2$) описывает поверхность, называемую гиперболическим параболоидом, и имеет в $(0, 0)$ седловую точку. В самом деле, эта функция дифференцируема в точке $(0, 0)$, имеет в этой точке равные нулю частные производные первого порядка $f'_x = y$, $f'_y = x$, но не имеет в точке $(0, 0)$ локального экстремума, так как равна нулю в самой точке $(0, 0)$, а в сколь угодно малой окрестности этой точки принимает как положительные, так и отрицательные значения (седловая точка, Рис. 4).¹ □

Пример 131. Найти экстремальные точки функции

$$z(x, y) = |x|, \quad \text{где } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

¹*Седловая точка* в математическом анализе – это такая точка из области определения функции, которая является стационарной для данной функции, однако не является точкой её локального экстремума. В такой точке, если рассматривается функция двух переменных, образованная графиком функции поверхность обычно напоминает по форме седло или горный перевал – выпуклая в одном направлении и вогнутая в другом. В общем случае, седловой точкой гладкой функции (график которой изображает кривую, поверхность или гиперповерхность) называется такая стационарная точка, в окрестности которой данная кривая (поверхность, гиперповерхность) не лежит полностью по одну сторону касательного пространства в данной точке. В случае функции одной переменной, седловая точка – это точка, которая одновременно является и стационарной точкой, и точкой перегиба.

Решение. Представьте себе эту поверхность. Найдём точки возможного экстремума функции. В полупространстве $x > 0$ имеем $f'_x(x, y) = 1$, т. е. эти точки экстремальными быть не могут. Аналогично показывается, что точки (x, y) , где $x < 0$, не являются экстремальными. Рассмотрим теперь точки вида $(0, y)$ и найдём в них частные производные:

$$f'_x(0, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, y) - f(0, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Как известно, этот предел не существует.

$$f'_y(0, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, y + \Delta y) - f(0, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

Следовательно, $(0, y)$, где $y \in \mathbb{R}$, — точки возможного экстремума. Покажем, что в них функция имеет нестрогий локальный минимум. Достаточно показать, что полное приращение функции в окрестности каждой из таких точек неотрицательно. В самом деле,

$$\Delta z(0, y) = z(0 + \Delta x, y + \Delta y) - z(0, y) = |\Delta x| \geq 0. \quad \square$$

С геометрической точки зрения, если, например, функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ локальный экстремум, то касательная плоскость к графику этой функции (поверхности) в точке $\overline{M}_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ либо параллельна плоскости Oxy , либо не существует.

8.3 Достаточные условия локального экстремума

«Мне кажется, главная цель обучения математике – психологическая. Задача, конечно, не том, чтобы изменить психологию, но, может быть, создать некую новую психологию, как бы параллельную обычной гуманитарной.

Я бы назвал четыре такие цели. Первое – это дисциплина мышления; второе – умение отличать истину от лжи; третье – умение отличать смысл от бессмыслицы; и четвертое – умение отличать понятное от непонятного».

Владимир Андреевич Успенский (1930–2018) – советский и российский математик, лингвист, публицист, популяризатор науки. Ученик А. Н. Колмогорова, профессор мехмата МГУ.

Для того чтобы убедиться, что в данной критической точке действительно имеется локальный экстремум, следует проверить выполнение *достаточных условий* локального экстремума. В этих достаточных условиях основную роль будет играть знак второго дифференциала в точке возможного экстремума.

Выше мы отмечали, что в случае, когда аргументы $x_1, \dots, x_m$ два раза дифференцируемой функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ являются либо независимыми переменными, либо линейными функциями некоторых независимых переменных, второй дифференциал этой функции в данной точке M_0 представляет собой квадратичную форму относительно дифференциалов аргументов $dx_1, \dots, dx_m$ следующего вида:

$$d^2u|_{M_0} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} dx_i dx_j, \quad \text{где } a_{ij} = a_{ji} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0). \quad (2)$$

Приведём три вида достаточных условий, лежащих в основе трёх основных способов проверки, является ли в действительности та или иная точка возможного экстремума экстремальной точкой (или нет).

1. Достаточные условия существования локального экстремума дважды дифференцируемой функции: по знаку второго дифференциала.

Теорема 2 (*достаточные условия локального экстремума, в формулировке через второй дифференциал*). Пусть функция $u = f(M)$ дважды дифференцируема в окрестности точки M_0 (включая саму точку), которая является стационарной, т. е. $df(M_0) = 0$. Пусть также все дифференциалы независимых переменных одновременно не обращаются в нуль, т. е. $\sum_{i=1}^m |dx_i| \neq 0$, а все частные производные второго порядка непрерывны в точке M_0 . Тогда:

- 1) если $d^2f(M_0) < 0$, то M_0 – точка строгого локального максимума;
- 2) если $d^2f(M_0) > 0$, то M_0 – точка строгого локального минимума;
- 3) если знак $d^2f(M_0)$ не определён (т. е. второй дифференциал может принимать как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от соотношений между дифференциалами dx_i), то экстремума в точке M_0 нет;
- 4) если же $d^2f(M_0) = 0$, или $d^2f(M_0) \geq 0$, или $d^2f(M_0) \leq 0$ (среди главных угловых миноров матрицы Гессе¹ имеются нулевые), то вопрос о наличии экстремума в точке остаётся открытым и для прояснения ситуации необходимо исследовать знаки дифференциалов более высоких порядков (см. ниже Теорему 3) или прибегнуть к другим способам исследования. В этом случае функция может иметь в точке M_0 нестрогий экстремум, или же не иметь экстремума.

Заметим, что если в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки M_0 функция $f \in C^2(U(M_0))$ и в точке M_0 функция $f(x, y)$ имеет нестрогий экстремум, то квадратичная форма $d^2f(M_0)$ обязательно будет полуопределённой.

Следующая теорема формулирует достаточные условия локального экстремума n раз дифференцируемой функции: по знаку первого ненулевого диф-

¹См. следующий п. 2.

ференциала.

Теорема 3 (*обобщение предыдущей теоремы*). Пусть в некоторой окрестности точки M_0 функция многих переменных $u = f(M)$ дифференцируема n раз и все её частные производные n -го порядка непрерывны в этой точке, причём

$$df(M_0) = d^2f(M_0) = \dots = d^{n-1}f(M_0) = 0, \text{ но } d^n f(M_0) \neq 0.$$

Тогда, если n – нечётно, то точка M_0 не является экстремальной, а если n – чётно, то в точке M_0 функция $f(M)$ имеет экстремум: локальный максимум при $d^n f(M_0) < 0$ и локальный минимум при $d^n f(M_0) > 0$.

2. Достаточное условие существования локального экстремума дважды дифференцируемой функции при помощи критерия Сильвестра. Выше мы отмечали, что второй дифференциал функции $f(M)$ можно рассматривать как квадратичную форму от дифференциалов $dx_1, \dots, dx_m$ независимых переменных (2).

Как известно из курса алгебры, исследование знака квадратичной формы может быть проведено путём приведения соответствующей квадратичной формы к каноническому виду. Однако тип квадратичной формы можно определить и не приводя её к каноническому виду.

Пусть дана квадратичная форма относительно переменных $x_1, \dots, x_m$

$$\Phi(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}x_i x_j, \quad (1)$$

где $a_{ij} = a_{ji} \ \forall i, j = \overline{1, n}$ (*координатная форма записи*). Так как $a_{ij} = a_{ji}$, то формулу (1) можно записать в виде

$$\Phi(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} a_{ij}x_i x_j.$$

Симметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется *матрицей квадратичной формы* (1). Квадратичную форму можно записать в *матричном виде* $\Phi = x^T A x$, где x – столбец переменных.

Квадратичная форма $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ называется *положительно определённой* (*отрицательно определённой*), если для любых значений $x_1, \dots, x_m$, одновременно не равных нулю, эта форма принимает строго положительные (строго отрицательные) значения. Квадратичная форма $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ называется *знакоопределённой*, если она является либо положительно определённой, либо отрицательно определённой. Квадратичная форма называется *знакопеременной*, если она принимает как строго положительные, так и строго отрицательные значения. Квадратичная форма называется *квазизнакоопределённой*, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, но при этом обращается в нуль для некоторых значений $x_1, \dots, x_m$, одновременно не равных нулю.

Главные миноры $\Delta_k = \det A_k$ ($k = \overline{1, m}$) – это определители подматриц $A_k = (a_{ij})_{i,j=1}^k$ матрицы A квадратичной формы:

$$\Delta_1 = \det A_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_m = \det A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

В теореме 4 ниже сформулирован критерий Сильвестра¹, который в алгебре позволяет определить тип квадратичной формы по знакам главных (угловых) миноров её матрицы.

Теорема 4 (*критерий Сильвестра знакоопределённости квадратичной формы*). Квадратичная форма $\Phi = x^T A x$ является:

1) положительно определённой² $\Leftrightarrow$ все главные миноры Δ_k матрицы A положительны: $\Delta_k > 0$, $k = \overline{1, m}$;

2) отрицательно определённой $\Leftrightarrow$ все главные миноры Δ_k матрицы A отличны от нуля и их знаки чередуются, начиная со знака минус:

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad (-1)^m \Delta_m > 0.$$

Замечание. Из критерия Сильвестра вытекают условия, при которых невырожденная квадратичная форма будет знакопеременной (неопределённой). Это будет в том случае, когда для матрицы квадратичной формы выполняется

¹Джеймс Джозеф *Сильвестр* (1814–1897) – английский математик, наиболее известные его работы относятся к алгебре. Д. Сильвестр называл музыку математикой чувств, а математику – музыкой разума. Он выражал надежду, что каждая из них должна получить завершение со стороны другой, и предвидел в будущем появление личности, в которой соединятся гении Бетховена и Гаусса.

²Т. е. $x^T A x > 0$ для всех $x \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}^m$).

хотя бы одно из трёх условий:

- один из угловых миноров равен нулю;
- два угловых минора нечётного порядка имеют разные знаки;
- один из угловых миноров чётного порядка отрицателен.

Иными словами, если в теореме 4

3) имеет место другой случай, но $\Delta_m \neq 0$, то квадратичная форма является знакопеременной (неопределённой);

4) если же $\Delta_m = 0$, то вопрос о характере квадратичной формы остаётся открытым, требуются дополнительные исследования.

В частности, для установления наличия и вида локального экстремума в стационарной точке функции нескольких переменных теорема 4 может быть переформулирована в виде следующих достаточных условий.

Теорема 4.1 (*признак Сильвестра для функций двух переменных*). Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $u = f(x, y)$, и в некоторой окрестности точки M_0 , включая саму точку, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Тогда:

1) в точке M_0 функция $f(x, y)$ имеет локальный максимум, если в этой точке

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0 \quad \text{и} \quad \Delta_1 = f''_{xx}(x_0, y_0) < 0;$$

2) в точке M_0 функция $f(x, y)$ имеет локальный минимум, если в этой точке

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0 \quad \text{и} \quad \Delta_1 = f''_{xx}(x_0, y_0) > 0;$$

3) в точке M_0 функция $f(x, y)$ не имеет локального экстремума (M_0 – седловая точка функции), если в этой точке

$$\Delta_2(x_0, y_0) < 0;$$

4) если же $\Delta_2(x_0, y_0) = 0$, то в точке M_0 экстремум функции $f(x, y)$ может быть, а может и не быть. Вопрос остаётся открытым, требуется дополнительное исследование.

Теорема 4.2 (*признак Сильвестра для функций трёх переменных*). Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, которая является стационарной для $f(x, y, z)$. Рассмотрим главные миноры матрицы Гессе:¹

¹Матрица вторых производных $H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix}$ называется *матрицей Гессе* для функции f .

$$\Delta_1 = f''_{xx}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix}.$$

1) Если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, то точка M_0 является точкой строгого локального минимума;

2) если $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, то точка M_0 является точкой строгого локального максимума;

3) если получилось что-то другое и при этом $\Delta_3 \neq 0$, то M_0 – седловая точка (экстремума нет);

4) если $\Delta_3 = 0$, то признак не даёт ответа о характере точки M_0 (нужны дополнительные исследования).

3. Исследование на локальный экстремум в точке по знаку приращения функции в этой точке. Непосредственно из определения экстремума следует полезный приём, который является *необходимым и достаточным условием* экстремума (как локального, так и краевого, строгого и нестрогого) и может быть эффективно использован при исследовании функций на наличие безусловных экстремумов, в том числе в тех случаях, когда функция не дифференцируема и даже не обязательно непрерывна в точке M_0 . Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 5 (*определение наличия экстремума по сохранению знака приращения функции в некоторой окрестности точки*). Пусть $u = f(M)$ определена на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^m$. Функция $f(M)$ имеет в точке $M_0 \in D$ нестрогий локальный максимум (соответственно, нестрогий локальный минимум) тогда и только тогда, когда существует окрестность этой точки, такая что для любой точки $M \in D$ из этой окрестности полное приращение функции в точке M_0 неположительно:

$$\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0) \leq 0$$

(соответственно, неотрицательно: $\Delta f(M_0) \geq 0$).

Аналогично можно сформулировать критерий существования строгого локального экстремума функции $f(M)$ в точке M_0 .

Рассмотрим примеры на применение этих способов.

Пример 132. Исследовать на экстремумы функцию

$$z = x^2 + (y - 1)^2.$$

Решение. Принимая во внимание необходимое условие локального экстремума, найдём точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} z'_x = 2x = 0, \\ z'_y = 2(y - 1) = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Итак, имеется единственная стационарная точка $M_0(0, 1)$. Проверим выполнение в этой точке достаточных условий.

1-й способ (по знаку второго дифференциала). Найдём

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2 = 2dx^2 + 2dy^2 > 0$$

при одновременно не равных нулю дифференциалах dx и dy . Следовательно, в точке $M_0(0, 1)$ функция имеет строгий локальный минимум, равный $f_{min} = f(0, 1) = 0$.

2-й способ (по критерию Сильвестра). Вычислим вторые производные

$$f''_{xx} = 2, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 0, \quad f''_{yy} = 2.$$

В точке M_0 имеем:

$$\Delta_1 = f''_{xx} = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

значит, в этой точке достигается локальный минимум. Чтобы найти его значение, подставим координаты точки в функцию: $f_{min} = f(M_0) = 0$.

3-й способ (по знаку приращения функции). Оценим знак полного приращения функции в точке $M_0(0, 1)$:

$$\Delta z(0, 1) = z(0 + \Delta x, 1 + \Delta y) - z(0, 1) = \Delta x^2 + (1 + \Delta y - 1)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \geq 0,$$

причём приращение функции равно 0 только при $\Delta x = \Delta y = 0$. Следовательно, в точке M_0 функция имеет строгий локальный минимум, равный $f(0, 1) = 0$.

4-й способ (графический). Уравнение $z = x^2 + (y - 1)^2$ задаёт в пространстве поверхность в виде кругового параболоида (изобразите её). Тогда становится очевидным, что функция имеет единственный локальный (он же глобальный) минимум в вершине $(0, 1)$, и он равен нулю.

5-й способ (метод оценок). Оценим значения функции:

$$z(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 \geq 0,$$

причём минимальное значение, равное 0, достигается тогда и только тогда, когда $x = 0, y = 1$. $\square$

Пример 133. Исследовать на экстремумы функцию

$$z = x^2 - (y - 1)^2.$$

Решение. Найдём точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} z'_x = 2x = 0, \\ z'_y = -2(y - 1) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Итак, имеется единственная стационарная точка $M_0(0, 1)$. Проверим достаточные условия.

1-й способ (по знаку второго дифференциала). Найдём

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2 = 2dx^2 - 2dy^2.$$

Покажем, что в найденной точке второй дифференциал не сохраняет определённого знака. В самом деле, при $dx \neq 0, dy = 0$ имеем $d^2z > 0$, а при $dx = 0, dy \neq 0$ имеем $d^2z < 0$. Это означает, что в стационарной точке экстремума нет.

2-й способ (критерий Сильвестра). Найдём вторые производные

$$f''_{xx} = 2, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 0, \quad f''_{yy} = -2.$$

В точке M_0 имеем:

$$\Delta_1 = f''_{xx} = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

значит, в этой точке экстремума нет.

3-й способ (по знаку приращения функции). Оценим знак полного приращения функции в точке $M_0(0, 1)$:

$$\Delta z(0, 1) = z(0 + \Delta x, 1 + \Delta y) - z(0, 1) = \Delta x^2 - (1 + \Delta y - 1)^2 = \Delta x^2 - \Delta y^2.$$

Покажем, что в найденной точке приращение функции не сохраняет определённого знака. В самом деле, при $\Delta x \neq 0, \Delta y = 0$ имеем $\Delta z > 0$, а при $\Delta x = 0, \Delta y \neq 0$ имеем $\Delta z < 0$. Это означает, что в стационарной точке экстремума нет. $\square$

8.4 Выпуклые функции многих переменных. Неравенства Йенсена.

«Чтобы переварить знания, надо поглощать их с аппетитом».

А. Франц.

Сформулируем определение выпуклости вначале для функций двух переменных. Оно является непосредственным обобщением аналогичного определения выпуклой функции одной переменной. Пусть D – выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$, т. е. множество, содержащее целиком отрезок прямой, соединяющий любые две его точки. Функция $f(x, y)$ называется *выпуклой вниз* (вогнутой) на D , если она всюду определена в D и для любых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ выполняется *неравенство Йенсена*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)).$$

Функция $f(x, y)$ выпукла вверх, если $(-f(x, y))$ выпукла вниз. Если $z = f(x, y)$ есть уравнение поверхности в прямоугольных декартовых координатах, то геометрический смысл последнего неравенства состоит в том, что середина любой хорды поверхности лежит над соответствующей точкой поверхности или совпадает с ней.

В общем случае, для функций m переменных понятие выпуклости функции вводится аналогично. Функция $f(x)$, определённая на выпуклом множестве $D \subseteq \mathbb{R}^m$, называется *выпуклой вниз*,¹ если для любых точек $x_1, x_2 \in D$ и произвольных $p_1 > 0, p_2 > 0, p_1 + p_2 = 1$, выполняется неравенство

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2).$$

Выпуклая функция m переменных $f(x)$ непрерывна и дифференцируема по любому направлению внутри своей области определения. Для дважды непрерывно дифференцируемой функции f положительная определённость матрицы Гессе вторых производных $H(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right), i, j = \overline{1, m}$, является достаточным условием строгой выпуклости вниз.²

Свойства выпуклых функций многих переменных.

1. *О сохранении выпуклости у наибольшей из выпуклых функций.* Если $f_1(x), \dots, f_n(x)$ – выпуклые вниз функции, определённые на выпуклом множестве $D \subseteq \mathbb{R}^m$, то функция $\max(f_1(x), \dots, f_n(x))$ также является выпуклой вниз на D .

2. *О сохранении выпуклости линейной комбинации выпуклых функций с неотрицательными коэффициентами.* Если функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ выпуклы вниз и $c_1, c_2, \dots, c_n \geq 0$, то выпукла вниз и их линейная комбинация

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x).$$

3. *О достижении строго выпуклой вниз функцией своего глобального максимума на границе компакта.* Точки глобального максимума строго выпуклой вниз функции, определённой на выпуклом компакте, лежат на границе этого компакта.

4. *О единственном глобальном минимуме строго выпуклой вниз функции.* Если функция f дифференцируема, строго выпукла вниз на выпуклой области D и имеет стационарную точку $x_0 \in D$, то x_0 является точкой глобального минимума f , притом единственной.

¹Здесь $x = (x_1, \dots, x_m) \in D$.

²Иначе это условие можно записать как $d^2f(x) > 0$. Если $d^2f(x) \geq 0$, то функция выпукла вниз в нестрогом смысле. Соответственно, условия $d^2f(x) < 0$ и $d^2f(x) \leq 0$ являются достаточными для строгой и нестрогой выпуклости функции вверх.

Иными словами, (строго) выпуклая функция не может иметь седловых точек. Это значит, что для выпуклой функции равенство её частных производных нулю является не только необходимым, но и достаточным условием экстремума. Более того, экстремум выпуклой функции является глобальным, т. е. наименьшим значением в случае функции, выпуклой вниз, и наибольшим — в случае функции, выпуклой вверх.

5. О существовании производной в любом направлении. Выпуклая функция $f(x)$, определённая на выпуклом множестве D , имеет в каждой внутренней точке $x \in D$ производную по любому направлению $\vec{e}$.

6. О непрерывности выпуклой функции. Выпуклая функция $f(x)$ непрерывна в каждой внутренней точке $x \in D$.

7. О выпуклости сложной функции. Если $f(x)$ выпукла вниз, а $F(y)$ — выпукла вниз и возрастает, то сложная функция $F(f(x))$ выпукла вниз.

Если $f(x)$ выпукла вниз, а $F(y)$ — выпукла вверх и убывает, то сложная функция $F(f(x))$ выпукла вверх.

Если $f(x)$ выпукла вверх, а $F(y)$ — выпукла вверх и возрастает, то сложная функция $F(f(x))$ выпукла вверх.

Если $f(x)$ выпукла вверх, а $F(y)$ — выпукла вниз и убывает, то сложная функция $F(f(x))$ выпукла вниз.

Точки перегиба для функций одной переменной превращаются в линии (поверхности) перегиба в случае функций многих переменных.

Пример 134. В качестве примера функции многих переменных, являющейся одновременно выпуклой вверх и вниз (в нестрогом смысле слова), можно привести линейную функцию

$$u = c_1x_1 + \dots + c_mx_m + c_0. \quad \square$$

Пример 135. Исследовать на выпуклость функцию

$$f(x, y, z) = 2x^2 - 4xz + 4y^2 - 8yz + 9z^2 + 4x + 8y - 20z.$$

Решение. Исследуем знак второго дифференциала в произвольной точке пространства.

1-й способ. Воспользуемся критерием Сильвестра:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -8 & 18 \end{vmatrix} = 192 > 0, \quad \Delta_2 = 32 > 0, \quad \Delta_1 = 4 > 0.$$

Следовательно, $d^2f(x, y, z) > 0$ и функция строго выпукла вниз во всём пространстве $\mathbb{R}^3$.

2-й способ. Вычислим частные производные $f'_x = 4x - 4z + 4$, $f''_{xx} = 4$, $f'_y = 8y - 8z + 8$, $f''_{yy} = 8$, $f'_z = -4x - 8y + 18z - 20$, $f''_{zz} = 18$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yz} = -8$,

$f''_{xz} = -4$ и второй дифференциал:

$$\begin{aligned}d^2 f(x, y, z) &= f''_{xx} dx^2 + f''_{yy} dy^2 + f''_{zz} dz^2 + 2f''_{xy} dx dy + 2f''_{xz} dx dz + 2f''_{yz} dy dz = \\&= 4dx^2 + 8dy^2 + 18dz^2 - 8dx dz - 16dy dz = \\&= 2((dx - 2dz)^2 + (2dy - 2dz)^2 + dx^2 + dz^2) > 0.\end{aligned}$$

Значит, функция строго выпукла вниз в пространстве $\mathbb{R}^3$. $\square$

Задача нахождения максимумов и минимумов функций многих переменных значительно сложнее аналогичной задачи для функций одной переменной. Задаче нахождения подобных экстремумов посвящён специальный раздел математики — *вариационное исчисление*.¹ В последние десятилетия бурное развитие переживает комплексная научная дисциплина — *исследование операций*,² посвящённая поиску оптимальных решений в различных, в том числе и экономических, задачах, в которых исследуемая (целевая) функция нескольких переменных принимает наибольшее или наименьшее значение.

Из рубрики «Это может быть интересно».

«Идиоты не могут понять, что они идиоты, потому что они идиоты».

Эффект Даннинга—Крюгера.

Комментарий. Эффект Даннинга—Крюгера — метакогнитивное искажение у низкоквалифицированных людей: они делают ошибочные выводы и принимают неудачные решения, но не осознают этих ошибок из-за неполноты знаний, умений и навыков, приходя к ложному определению пределов компетенции и завышению представлений о своих способностях — даже в незнакомых областях знаний и впервые совершаемых действиях.

Таким образом, эффект Даннинга—Крюгера — когнитивное искажение; склонность людей, имеющих очень низкий уровень компетенции в определённой области, значительно переоценивать свои возможности, что приводит к невежеству, чреватому бесосновательной самоуверенностью.

¹Наряду с задачами, в которых необходимо найти максимальные и минимальные значения некоторой функции, в задачах физики, механики и других наук возникает необходимость найти максимальные или минимальные значения величин особого рода, называемых *функционалами*. Если аргумент функции — число (вектор), то аргумент функционала — функция. Например, функционалом является длина L дуги плоской или пространственной кривой, соединяющей две заданные точки. Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить экстремальные значения функционалов.

²*Исследование операций* (англ. operations research) — дисциплина, занимающаяся разработкой и применением методов нахождения оптимальных решений на основе математического моделирования, статистического моделирования и различных эвристических подходов в различных областях человеческой деятельности.

Высококвалифицированные люди, наоборот, склонны занижать оценку своих способностей и страдать от недостаточной уверенности в своих силах, считая других более компетентными. Таким образом, менее компетентные люди в целом имеют более высокое мнение о собственных способностях, чем это свойственно людям компетентным (которые к тому же склонны предполагать, что окружающие оценивают их способности так же низко, как и они сами). Также обладатели высокого уровня квалификации ошибочно полагают, что задачи, лёгкие для них, так же легки и для других людей.

Для проверки выдвинутой гипотезы Крюгер и Даннинг провели серию экспериментов с участием студентов — слушателей курсов по психологии в Корнелльском университете. При этом они исходили из результатов исследований своих предшественников, которые показали, что некомпетентность во многом проистекает из незнания основ той или иной деятельности, будь то понимание прочитанного, управление автомобилем, игра в шахматы, игра в теннис и т. п.

Ими была выдвинута гипотеза, что для людей с низкой квалификацией в любом виде деятельности характерно следующее:

1. Они склонны переоценивать собственные умения.
2. Они не способны адекватно оценивать действительно высокий уровень умений у других.
3. Они не способны осознавать всю глубину своей некомпетентности.
4. После обучения у них появляется способность осознать уровень своей прежней некомпетентности, даже если их истинная компетентность после обучения практически не меняется.

Результаты экспериментов, подтвердивших выдвинутую гипотезу, были опубликованы на английском языке в декабре 1999 года в *Журнале психологии личности и социальной психологии*. За это исследование авторам статьи была присуждена Шнобелевская премия по психологии за 2000 год.

На ту же тему:

«Одно из неприятных свойств нашего времени состоит в том, что те, кто испытывает уверенность, глупы, а те, кто обладает хоть каким-то воображением и пониманием, исполнены сомнений и нерешительности».

Бертран Рассел (1872–1970) – британский философ, логик, математик и общественный деятель.

8.5 Задачи для самостоятельного решения

№394. Привести пример функции $z = f(x, y)$, имеющей единственную стационарную точку, в которой нет локального экстремума.

Исследовать на локальные экстремумы функции двух переменных:

№395. $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x, y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$

№396. $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x^2 + y^2 \geq 1, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 < 1; \end{cases}$

№397. $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x^2 + y^2 = 1, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$

№398. [8, № 3621] $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$;

№399. [8, № 3622] $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$;

№400. [8, № 3623] $z = (x - y + 1)^2$;

№401. $f(x, y) = (2x + y - 1)^2 + 5$;

№402. [8, № 3624] $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$;

№403. $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$;

№404. $f(x, y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$;

№405. $f(x, y) = e^{x+y}(x^2 - 2y^2)$;

№406. $f(x, y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$;

№407. $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$;

№408. [8, № 3631] $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;

№409. $f(x, y) = 4 + \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$;

№410. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;

№411. $z = x^4 + y^4 - 36xy$;

№412. [8, № 3627] $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;

№413. [8, № 3628] $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0)$;

№414. $z = (x - y)^2 + (y^3 - 1)^4 - 1$;

№415. [8, № 3627(6)] $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;

№416. [5, Пример № 8.47] $z = (1 + x^2)\sqrt[3]{y}$;

№417. [5, Пример № 8.46] $z = (1 - x^2)\sqrt[3]{y^2}(1 - y)$;

№418. [5, Пример № 8.48] $z = (x - y)^2 + (y^3 - 1)^4 - 1$;

№419. [5, Пример № 8.49] $z = \frac{xy}{1 + x^2y^2}$;

№420. [8, № 3636] $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, где $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;

№421. [12, с. 34] $f(x, y) = \int_x^{xy} e^{t^2} dt$;

№422. Определить, при каких значениях параметра a функция

$$z(x, y) = x^3 + y^3 + 4xy - 7x - 7y + a(x - 1)^2 + a(y - 1)^2$$

в точке $(1, 1)$: 1) имеет максимум; 2) имеет минимум; 3) не имеет экстремума.

Исследовать на локальные экстремумы функции трёх переменных:

№423. [8, № 3642] $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;

№424. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$;

№425. [8, № 3643] $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$;

№426. $u = z^3 + 3x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 27z + 12$;

№427. $u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$;

№428. $u = -x^2 - 5y^2 - 3z^2 + xy - 2xz + 2yz + 11x + 2y + 18z + 10$;

№429. $u = -2x^2 - y^2 + 2z^2 - 2xy + 3xz - 2yz - 4x + 8y + z + 4$;

№430. [5, Пример № 8.45] $u = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$;

№431. $u = z^3 - x^2 - 3y^2 - \frac{3}{2}z^2 - 4x + 6y + 2$;

№432. [8, № 3647] $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$, где $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, $0 \leq z \leq \pi$.

№433. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1, 2, 3)$ до плоскости

$$2x + 2y - z - 9 = 0.$$

Исследование функций на выпуклость:

№434. Выяснить, является ли выпуклой на $\mathbb{R}^2$ функция

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + \sin(x + y) ?$$

№435. Исследовать на выпуклость функцию

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

8.6 Ответы и решения

394. В качестве такого примера можно взять функцию $z = x^3 + y^3$. У неё имеется единственная стационарная точка $(0, 0)$, которая не является экстремальной, поскольку в любой её окрестности можно найти точки, в которых функция принимает как положительные, так и отрицательные значения. Другие примеры: $z = xy$, $z = x^2 - y^2$ в точке $(0, 0)$ имеют седло.

395. Данная функция напоминает функцию Дирихле, но для функции двух переменных. Заметим, что данная функция разрывна в каждой точке. Для нахождения локальных экстремумов воспользуемся определением локального экстремума.

Возьмём произвольную точку, у которой обе координаты рациональны. Очевидно, по определению локального максимума, существует окрестность этой точки, всюду в пределах которой функция принимает значения, меньшие либо равные 1. Следовательно, функция имеет в такой точке (нестрогий) локальный максимум, равный 1.

Теперь возьмём любую точку, у которой хотя бы одна из координат иррациональна. Очевидно, существует окрестность этой точки, всюду в пределах которой функция принимает значения, большие либо равные 0. Следовательно, функция имеет в такой точке (нестрогий) локальный минимум, равный 0. Ответ: любая точка плоскости является экстремальной.

396. Применяя определение локального экстремума, получаем, что точки (x, y) , где $x^2 + y^2 = 1$, являются точками нестрогого локального максимума, а остальные точки (в силу постоянства функции) являются точками нестрогого локального минимума и нестрогого локального максимума одновременно.

397. По определению локального экстремума получаем, что точки (x, y) , где $x^2 + y^2 = 1$, являются точками нестрогого локального максимума, а остальные точки (в силу постоянства функции) являются точками нестрогого локального минимума и нестрогого локального максимума одновременно.

398. См. решение в примерах, разобранных в пункте «Достаточные условия локального экстремума».

399. См. решение в примерах, разобранных в пункте «Достаточные условия локального экстремума».

400. Найдём стационарные точки функции:

$$\begin{cases} z'_x = 2(x - y + 1) = 0, \\ z'_y = -2(x - y + 1) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x - y + 1 = 0,$$

т. е. точки возможного экстремума заполняют собой прямую $x - y + 1 = 0$. Вычислим частные производные 2-го порядка и попробуем воспользоваться

критерием Сильвестра:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

значит, критерий Сильвестра не даёт ответа на вопрос, имеется ли и какой именно экстремум в этих точках. Тогда исследуем знак полного приращения:

$$\begin{aligned} \Delta z(x, y) &= z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y) = \\ &= ((x + \Delta x) - (y + \Delta y) + 1)^2 - (x - y + 1)^2 = \\ &= ((x - y + 1) + (\Delta x - \Delta y))^2 - (x - y + 1)^2 = \end{aligned}$$

(так как в стационарных точках $x - y + 1 = 0$) $= (\Delta x - \Delta y)^2 \geq 0$. Следовательно, в стационарных точках функция имеет нестрогий минимум, равный 0.

401. Найдём точки возможного экстремума функции:

$$\begin{cases} f'_x = 4(2x + y - 1) = 0, \\ f'_y = 2(2x + y - 1) = 0, \end{cases}$$

т. е. точки возможного экстремума заполняют собой прямую $2x + y - 1 = 0$. Попробуем применить критерий Сильвестра:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

значит, критерий Сильвестра не даёт ответа на вопрос, имеется ли и какой именно экстремум в этих точках.

Покажем, что попытка оценить знак второго дифференциала в этих точках также не приводит к успеху:

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2 = 8dx^2 + 8dx dy + 2dy^2 = 2(2dx + dy)^2 \geq 0,$$

причём в точках возможного экстремума дифференциал равен нулю (при $dy = -2dx \neq 0$). Этот способ также оказался не применим.

Исследуем тогда знак полного приращения функции в точках возможного экстремума:

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ &= ((2(x + \Delta x) + (y + \Delta y) - 1)^2 + 5) - ((2x + y - 1)^2 + 5) = \\ &= (2(x + \Delta x) + (y + \Delta y) - 1)^2 - (2x + y - 1)^2 = \\ &= ((2x + y - 1) + (2\Delta x + \Delta y))^2 - (2x + y - 1)^2 = (2\Delta x + \Delta y)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

следовательно, в стационарных точках функция имеет нестрогий минимум, равный 5.

402. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - y - 2 = 0, \\ z'_y = -x + 2y + 1 = 0, \end{cases}$$

откуда находим единственную точку $M(1, 0)$. Так как

$$\Delta_1 = z''_{xx} = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

то, в силу критерия Сильвестра, в точке M функция имеет строгий локальный минимум, равный $z_{min} = z(M) = -1$.

403. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 6y = 0, \\ f'_y = 24y^2 - 6x = 0, \end{cases}$$

откуда определяем $M_1(0, 0)$, $M_2(1, \frac{1}{2})$. Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = -6, \quad f''_{yy} = 48y.$$

1) В точке $M_1(0, 0)$ имеем:

$$\Delta_1 = f''_{xx} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0,$$

значит, в этой точке нет экстремума.

2) В точке $M_2(1, \frac{1}{2})$ имеем:

$$\Delta_1 = f''_{xx} = 6 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{vmatrix} = 108 > 0,$$

следовательно, по критерию Сильвестра, в точке M_2 функция имеет (строгий) локальный минимум, равный $f_{min} = f(M_2) = 4$.

404. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} f'_x = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 = 0, \\ f'_y = \sqrt{x} - 4y + 14 = 0, \end{cases}$$

откуда определяем $M_0(4, 4)$ (других точек локального экстремума нет, так как точка с абсциссой $x = 0$, в которой z'_x не определена, находится на границе области определения). Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$$f''_{xx} = -\frac{y}{4\sqrt{x^3}}, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''_{yy} = -4,$$

поэтому в точке $M_0(4, 4)$ имеем:

$$\Delta_1 = f''_{xx} = -\frac{1}{8} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -4 \end{vmatrix} = \frac{7}{16} > 0,$$

следовательно, согласно критерию Сильвестра, в точке $M_0(4, 4)$ функция имеет строгий локальный максимум, равный $f_{max} = 28$.

405. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} f'_x = e^{x+y}(x^2 + 2x - 2y^2) = 0, \\ f'_y = e^{x+y}(x^2 - 2y^2 - 4y) = 0, \end{cases}$$

откуда определяем $M_1(0, 0)$ и $M_2(-4, 2)$. Проверим достаточные условия. Найдём вторые производные:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= e^{x+y}(x^2 + 4x - 2y^2 + 2), & f''_{xy} &= f''_{yx} = e^{x+y}(x^2 + 2x - 2y^2 - 4y), \\ f''_{yy} &= e^{x+y}(x^2 - 2y^2 - 8y - 4). \end{aligned}$$

1) Точка $M_1(0, 0)$:

$$\Delta_1 = f''_{xx}|_{M_1} = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0,$$

следовательно, согласно критерию Сильвестра, локального экстремума в этой точке нет.

2) Точка $M_2(-4, 2)$:

$$\Delta_1 = f''_{xx}|_{M_2} = -6e^{-2} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6e^{-2} & -8e^{-2} \\ -8e^{-2} & -12e^{-2} \end{vmatrix} = 8e^{-4} > 0,$$

следовательно, функция имеет в этой точке локальный максимум, равный $f(-4, 2) = 8e^{-2}$.

406. Найдём точки возможного экстремума функции:

$$\begin{cases} f'_x = -2e^{x^2-y}(2x^2 - x(y+5) + 1) = 0, \\ f'_y = e^{x^2-y}(2x - y - 4) = 0, \end{cases}$$

решая которую, находим единственную стационарную точку $M_0(1, -2)$. Воспользуемся критерием Сильвестра:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= f''_{xx} = e^{x^2-y}(-8x^3 + 4x^2(y+5) - 12x + 2y + 10), \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = e^{x^2-y} \cdot \begin{vmatrix} -8x^3 + 4x^2(y+5) - 12x + 2y + 10 & 4x^2 - 2x(y+4) + 2 \\ 4x^2 - 2x(y+4) + 2 & -2x + y + 3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В точке M_0 имеем:

$$\Delta_1 = -2e^3 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2e^3 & 2e^3 \\ 2e^3 & -e^3 \end{vmatrix} = -2e^6 < 0.$$

Следовательно, стационарная точка не является экстремальной (седловая точка), и функция не имеет локальных экстремумов.

407. Точки возможного экстремума функции находим из системы

$$\begin{cases} f'_x = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0, \\ f'_y = e^{2x}(2y + 2) = 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $M_0 \left(\frac{1}{2}, -1\right)$. Проверим выполнение в этой критической точке достаточных условий экстремума. Найдём производные 2-го порядка

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= e^{2x}(4x + 4y^2 + 8y + 4) \Big|_{M_0} = 2e, \\ f''_{xy} &= e^{2x}(4y + 4) \Big|_{M_0} = 0, \quad f''_{yy} = 2e^{2x} \Big|_{M_0} = 2e, \end{aligned}$$

и вычислим второй дифференциал

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2 = 2e(dx^2 + dy^2) > 0.$$

Следовательно, $M_0 \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ – точка локального минимума, который равен $f_{\min} = f \left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}$.

408. Найдём точки возможного экстремума:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Система не имеет решений, т. е. стационарных точек нет. Проверим точку $(0, 0)$, вычислив в ней частные производные по определению:

$$z'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z(x, 0) - z(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{x^2 + 0^2}) - 1}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x},$$

но этот предел, как известно, не существует. Аналогично, не существует в точке $(0, 0)$ и вторая частная производная $z'_y(0, 0)$. В этой точке возможен экстремум, попробуем найти его по определению локального экстремума, оценив знак полного приращения функции:

$$\begin{aligned} \Delta z(0, 0) &= z(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - z(0, 0) = \\ &= (1 - \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) - (1 - \sqrt{0^2 + 0^2}) = -\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < 0, \end{aligned}$$

если Δx и Δy одновременно не обращаются в нуль. Следовательно, в данной точке функция имеет строгий локальный максимум, равный 1. Уточним, что 1 будет одновременно и глобальным максимумом, и наибольшим значением функции.

409. Для нахождения точек возможного экстремума найдём частные производные

$$f'_x(x, y) = \frac{4x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 + y^2}}, \quad f'_y(x, y) = \frac{4y}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 + y^2}}.$$

Однако система

$$\begin{cases} f'_x = \frac{4x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 + y^2}} = 0, \\ f'_y = \frac{4y}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 + y^2}} = 0, \end{cases}$$

не имеет решений, поэтому единственно возможная критическая точка – это $(0, 0)$. Оценим знак приращения функции в этой точке:

$$\Delta f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = \left(4 + \sqrt[3]{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^2}\right) - 4 = \sqrt[3]{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^2} > 0,$$

если Δx и Δy одновременно не обращаются в нуль. Это означает, что в точке $(0, 0)$ функция имеет строгий локальный минимум, равный 4. Уточним, что 4 будет одновременно и глобальным минимумом, и наименьшим значением функции.

410. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 6x^2 - y^2 + 10x = 0, \\ z'_y = -2xy + 2y = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим точки $M_1(0, 0)$, $M_2(-\frac{5}{3}, 0)$, $M_3(1, 4)$, $M_4(1, -4)$. Найдём 2-й дифференциал:

$$d^2z = (12x + 10)dx^2 - 4ydx dy + (2 - 2x)dy^2.$$

Тогда: 1) $d^2z(M_1) = 10dx^2 + 2dy^2 > 0$, следовательно, функция имеет в точке M_1 локальный минимум, равный $z_{\min} = 0$.

2) $d^2z(M_2) = -10dx^2 + \frac{16}{3}dy^2$. Если $dy = 0$, $dx \neq 0$, то $d^2z(M_2) < 0$, а если $dx = 0$, $dy \neq 0$, то $d^2z(M_2) > 0$. Следовательно, это седловая точка (экстремума нет).

3) $d^2z(M_3) = 22dx^2 - 16dx dy$. Если $dy = -dx \neq 0$, то $d^2z(M_3) > 0$, а если $dy = 2dx \neq 0$, то $d^2z(M_3) < 0$. Следовательно, в этой точке также нет экстремума.

4) $d^2z(M_4) = 22dx^2 + 16dx dy$. Если $dy = 0$, то $d^2z(M_4) > 0$, а если $dy = -2dx \neq 0$, то $d^2z(M_4) < 0$. Следовательно, и в этой точке нет экстремума.

Ответ: функция имеет локальный минимум, равный 0, в точке $M_1(0, 0)$.

411. 1) Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 36y = 0, \\ z'_y = 4y^3 - 36x = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим точки $M_1(0, 0)$, $M_2(3, 3)$, $M_3(-3, -3)$.

2) Проверим выполнение достаточных условий экстремальности. Вычислим для этого второй дифференциал:

$$d^2z = 12x^2dx^2 - 72dxdy + 12y^2dy^2.$$

а) В точке $M_1(0, 0)$ имеем $d^2z(0, 0) = -72dxdy$. Если $dy = dx$, то $d^2z(0, 0) = -72dx^2 < 0$, а если $dy = -dx$, то $d^2z(0, 0) = 72dx^2 > 0$. То есть второй дифференциал не является знакоопределённым, а следовательно, экстремума в этой точке нет.

б) В точках $M_2(3, 3)$, $M_3(-3, -3)$ имеем

$$d^2z(M_{2,3}) = 108dx^2 - 72dxdy + 108dy^2 = 36(2dx^2 + 2dy^2 + (dx - dy)^2).$$

Очевидно, что $d^2z(M_{2,3}) > 0$ при одновременно неравных нулю dx , dy , т. е. в этих точках функция имеет локальные минимумы, равные $z_{\min} = z(M_{2,3}) = -162$.

412. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ z'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим три точки: $M_1(0, 0)$, $M_2(-1, -1)$, $M_3(1, 1)$. Найдём вторые производные:

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = -2, \quad f''_{yy} = 12y^2 - 2.$$

1) Точка $M_1(0, 0)$. Применим критерий Сильвестра:

$$\Delta_1 = f''_{xx} = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, ничего определённого сказать нельзя.

Покажем, что оценка знака второго дифференциала в этой точке также не вносит ясности:

$$d^2z(x, y) = (12x^2 - 2)dx^2 - 4dxdy + (12y^2 - 2)dy^2,$$

$$d^2z(0, 0) = -2dx^2 - 4dxdy - 2dy^2 = -2(dx + dy)^2 \leq 0$$

при $dx^2 + dy^2 \neq 0$ (если, например, $dy = -dx \neq 0$, то $d^2z = 0$). Это означает отрицательную полуопределённость, т. е. также ничего сказать о наличии экстремума в точке нельзя.

Тогда оценим знак полного приращения функции:

$$\Delta z(0, 0) = z(\Delta x, \Delta y) - z(0, 0) = \Delta x^4 + \Delta y^4 - \Delta x^2 - 2\Delta x\Delta y - \Delta y^2.$$

При $\Delta y = \Delta x$ получим $\Delta z(0, 0) = 2\Delta x^4 - \Delta x^2 = 2\Delta x^2(\Delta x^2 - 2) < 0$ при достаточно малых $\Delta x \neq 0$. При $\Delta y = -\Delta x \neq 0$ имеем $\Delta z(0, 0) = 2\Delta x^4 > 0$. Следовательно, в любой сколь угодно малой окрестности точки $(0, 0)$ найдутся точки, в которых приращение функции принимает значения разных знаков, т. е. в этой точке экстремума нет.

2) Точка $M_2(-1, -1)$. По критерию Сильвестра

$$\Delta_1 = f''_{xx} = 10 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 96 > 0,$$

следовательно, в этой точке имеется локальный минимум, равный $z(-1, -1) = -2$.

3) Точка $M_3(1, 1)$. Согласно критерию Сильвестра

$$\Delta_1 = f''_{xx} = 10 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 96 > 0,$$

следовательно, и в этой точке имеется локальный минимум, равный $z(1, 1) = -2$.

413. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = y - \frac{50}{x^2} = 0, \\ z'_y = x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 2. \end{cases}$$

Согласно критерию Сильвестра, в данной точке имеем:

$$\Delta_1 = z''_{xx} = \frac{4}{5} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

следовательно, данная точка является точкой локального минимума, причём $z_{min} = z(5, 2) = 30$.

414. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 2(x - y) = 0, \\ z'_y = -2(x - y) + 4(y^3 - 1)^3 \cdot 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ y = 0 \text{ или } y = 1. \end{cases}$$

Итак, имеем две стационарные точки: $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$. Для проверки достаточного условия, вычислим второй дифференциал:

$$z''_{xx} = 2, \quad z''_{yy} = 2 + 24(y^3 - 1)^3 y + 108y^4(y^3 - 1)^2, \quad z''_{xy} = -2.$$

Тогда

$$d^2z = 2dx^2 - 4dxdy + (2 + 24(y^3 - 1)^3y + 108y^4(y^3 - 1)^2)dy^2.$$

Имеем $d^2z(M_1) = d^2z(M_2) = 2(dx - dy)^2 \geq 0$, т. е. ничего определённого сказать о наличии экстремума в этих точках нельзя. Исследуем знак приращения функции в произвольной малой окрестности точек $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$.

1) $M_1(0, 0)$: $\Delta z(0, 0) = z(\Delta x, \Delta y) - z(0, 0) = (\Delta x - \Delta y)^2 + (\Delta y^3 - 1)^4 - 1$. Если $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$, $\Delta z(0, 0) = \Delta x^2 > 0$. Если же $\Delta x = \Delta y \in (0, 1)$, то $\Delta z(0, 0) = (\Delta y^3 - 1)^4 - 1 < 0$. Следовательно, в точке M_1 нет экстремума.

2) $M_2(1, 1)$: $\Delta z(1, 1) = z(1 + \Delta x, 1 + \Delta y) - z(1, 1) = ((1 + \Delta x) - (1 + \Delta y))^2 + ((1 + \Delta y)^3 - 1)^4 - 1 + 1 = (\Delta x - \Delta y)^2 + ((1 + \Delta y)^3 - 1)^4 \geq 0$, причём неравенство обращается в равенство только при $\Delta x = \Delta y = 0$, в противном случае имеем $\Delta z(1, 1) > 0$. Следовательно, в точке M_2 функция имеет строгий локальный минимум, равный (-1) .

415. 1) Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 8x^3 - 2x = 0, \\ z'_y = 4y^3 - 4y = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим точки $M_1(0, 0)$, $M_2(0, 1)$, $M_3(0, -1)$, $M_4(\frac{1}{2}, 0)$, $M_5(\frac{1}{2}, 1)$, $M_6(\frac{1}{2}, -1)$, $M_7(-\frac{1}{2}, 0)$, $M_8(-\frac{1}{2}, 1)$, $M_9(-\frac{1}{2}, -1)$.

2) Согласно критерию Сильвестра, найдём

$$\Delta_1 = z''_{xx} = 24x^2 - 2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix} = 8(12x^2 - 1)(3y^2 - 1).$$

а) $\Delta_1(M_1) = -2 < 0$, $\Delta_2(M_1) = 8 > 0 \Rightarrow$ в точке M_1 имеется локальный максимум, равный $z_{\max} = 0$;

б) $\Delta_2(M_2) = -16 < 0 \Rightarrow$ в точке M_2 экстремума нет (седловая точка);

в) $\Delta_2(M_3) = -16 < 0 \Rightarrow$ в точке M_3 экстремума нет (седловая точка);

г) $\Delta_2(M_4) = -16 < 0 \Rightarrow$ в точке M_4 экстремума нет (седловая точка);

д) $\Delta_1(M_5) = 4 > 0$, $\Delta_2(M_5) = 32 > 0 \Rightarrow$ в точке M_5 имеется локальный минимум, равный $z_{\min} = -\frac{9}{8}$;

е) $\Delta_1(M_6) = 4 > 0$, $\Delta_2(M_6) = 32 > 0 \Rightarrow$ в точке M_6 имеется локальный минимум, равный $z_{\min} = -\frac{9}{8}$;

ж) $\Delta_2(M_7) = -16 < 0 \Rightarrow$ в точке M_7 экстремума нет (седловая точка);

з) $\Delta_1(M_8) = 4 > 0$, $\Delta_2(M_8) = 32 > 0 \Rightarrow$ в точке M_8 имеется локальный минимум, равный $z_{\min} = -\frac{9}{8}$;

и) $\Delta_1(M_9) = 4 > 0$, $\Delta_2(M_9) = 32 > 0 \Rightarrow$ в точке M_9 имеется локальный минимум, равный $z_{\min} = -\frac{9}{8}$.

416. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sqrt[3]{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1+x^2}{3\sqrt[3]{y^2}} \quad (y \neq 0),$$

поэтому ни одна точка вне оси Ox не является критической. Рассмотрим точки $P_0(x_0, 0)$ и $P(x_0, y)$ и найдём частную производную

$$\frac{\partial z}{\partial y}(P_0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{z(P) - z(P_0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+x_0^2)\sqrt[3]{y}}{y} = \infty.$$

Таким образом, все точки оси Ox являются для функции критическими точками, в которых конечная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ не существует. При этом непосредственно из определения $z(x, y)$ получаем, что если $y > 0$, то $z(x_0, y) > 0 = z(x_0, 0)$, а если $y < 0$, то $z(x_0, y) < 0 = z(x_0, 0)$ для любого x_0 . Итак, каждая точка оси Ox является критической точкой функции (из-за нарушения условия гладкости), но не является точкой экстремума.

417. Найдём частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x\sqrt[3]{y^2}(1-y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1-x^2)(2-5y)}{3\sqrt[3]{y}} \quad (y \neq 0)$$

и определим критические точки.

Пусть $M_0(x_0, 0)$ и $M(x_0, y)$, $x_0 \neq \pm 1$, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{z(M) - z(M_0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1-x_0^2)\sqrt[3]{y^2}(1-y)}{y} = \infty.$$

Если рассмотреть точки $M_1(1, 0)$ и $M(1, y)$, то $z(M) - z(M_1) = 0$, следовательно, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_1) = 0$. Точно так же $\frac{\partial z}{\partial y}(M_2) = 0$, где $M_2(-1, 0)$. Поэтому все точки оси Ox , кроме точек M_1 и M_2 , являются такими критическими точками функции $z(x, y)$, в которых производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ не существует (конечная). В точках M_1 и M_2 выполняются равенства $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, т. е. эти точки также критические, но в любой окрестности как точки M_1 , так и точки M_2 имеются точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial y}$ не существует (поэтому для любой окрестности $U(M)$ произвольной точки M оси Ox функция z не является функцией класса $C^2(U(M))$).

Если рассмотреть произвольную точку вида $M_0(x_0, 0)$, где $|x_0| < 1$, и такую её окрестность $U(M_0)$, что для всех $(x, y) \in U(M_0)$ имеем $|x| < 1$, $|y| < 1$, то для всех $(x, y) \in U(M_0)$ получим $z(x, y) \geq 0 = z(x_0, 0)$. Итак, в точке M_0 функция $z(x, y)$ имеет локальный минимум (нестрогий). Точно так же проверяется, что

во всех точках $M_1(x_1, 0)$, $|x_1| > 1$, функция $z(x, y)$ имеет нестрогий локальный максимум.

Рассмотрим теперь произвольную окрестность $U(M_2)$ точки $M_2(1, 0)$. Если $(x, y) \in U(M_2)$, $x > 1$, $0 < |y| < 1$, то $z(x, y) < 0 = z(1, 0) = z(M_2)$. Если же $(x, y) \in U(M_2)$, $0 < x < 1$, $0 < |y| < 1$, то $z(x, y) > 0 = z(1, 0) = z(M_2)$, т. е. в точке $M_2(1, 0)$ функция $z(x, y)$ не имеет экстремума. Точно так же проверяется, что точка $M_3(-1, 0)$ не является экстремальной.

Кроме точек оси Ox критическими точками функции $z(x, y)$ являются точки $M_4(1, 1)$, $M_5(-1, 1)$, $M_6(0, \frac{2}{5})$. Для анализа поведения функции в окрестностях этих точек оценим в них знак второго дифференциала:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -2\sqrt[3]{y^2}(1-y), & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= (1-x^2)\left(-\frac{2}{9}\right)y^{-\frac{4}{3}}(1+5y), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{2}{3}xy^{-\frac{1}{3}}(5y-2).\end{aligned}$$

Отсюда $d^2z(M_6) = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{(\frac{2}{5})^2}dx^2 - \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{2}}dy^2 < 0$, поэтому в точке $M_6(0, \frac{2}{5})$ функция $z(x, y)$ имеет строгий локальный максимум. Так как $d^2z(M_4) = 4dxdy$ есть знакопеременная квадратичная форма, то в точке $M_4(1, 1)$ функция $z(x, y)$ не имеет экстремума (седловая точка). Аналогично проверяется, что $M_5(-1, 1)$ – седловая точка функции $z(x, y)$.

418. Найдём стационарные точки этой гладкой функции:

$$\begin{cases} z'_x = 2(x-y) = 0, \\ z'_y = -2(x-y) + 12y^2(y^3-1)^3 = 0, \end{cases}$$

отсюда получаем $M_0(0, 0)$ и $M_1(1, 1)$. Вычислим в них второй дифференциал:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 + 24y(y^3-1)^3 + 108y^4(y^3-1)^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2.$$

Тогда имеем: $d^2z(M_0) = d^2z(M_1) = 2dx^2 - 4dxdy + 2dy^2 = 2(dx-dy)^2$, откуда видно, что это полуопределённая квадратичная форма (неотрицательная). Поскольку $z(M_1) = -1$ и $z(M) > -1$ для любой точки $M \neq M_1$, то в точке $M_1(1, 1)$ функция $z(x, y)$ имеет строгий локальный минимум (даже абсолютный минимум).

Рассмотрим поведение функции в произвольной окрестности $U(M_0)$ точки $M_0(0, 0)$. Если $M(x, 0) \in U(M_0)$, $x \neq 0$, то $z(M) = x^2 > 0 = z(M_0)$. Если же $M(y, y) \in U(M_0)$, $0 < y < 1$, то $z(M) = (y^3-1)^4-1 < 0 = z(M_0)$. Следовательно, точка M_0 – седловая точка функции $z(x, y)$.

419. Поскольку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2},$$

то критическими точками функции $z(x, y)$ является точка $M_0(0, 0)$ и все точки $M(x, y)$: $xy = \pm 1$. Из неравенства $|2xy| \leq 1 + x^2y^2$ получаем, что $|z| \leq \frac{1}{2}$. В каждой точке линии $xy = 1$ имеем $z(x, y) = \frac{1}{2}$; в каждой точке линии $xy = -1$ имеем $z(x, y) = -\frac{1}{2}$. Следовательно, в каждой точке линии $xy = 1$ функция имеет нестрогий максимум, в каждой точке линии $xy = -1$ – нестрогий минимум.

Найдём вторые частные производные функции z :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2xy^3 \frac{x^2y^2 - 3}{(1 + x^2y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3y \frac{x^2y^2 - 3}{(1 + x^2y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1 - 6x^2y^2 + x^4y^4}{(1 + x^2y^2)^3}.$$

В точке $M(x, y)$, где $xy = 1$ или $xy = -1$, квадратичная форма $d^2z(M) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(xy) \cdot (y^2 dx^2 \pm 2xy dx dy + x^2 dy^2)$ полуопределена, как и должно быть в точках нестрогого экстремума. Квадратичная форма $d^2z(M_0) = 2dx dy$ – знакопеременная, следовательно, $M_0(0, 0)$ – седловая точка.

420. 1) Используя необходимое условие экстремума, найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = \cos x - \sin(x - y) = 0, \\ z'_y = -\sin y + \sin(x - y) = 0, \end{cases}$$

откуда получаем

$$\begin{cases} \cos x - \sin(x - y) = 0, \\ \cos x - \sin y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin(x - y) = 0, \\ \cos x - \cos(\frac{\pi}{2} - y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x - \sin(x - y) = 0, \\ -2 \sin \frac{x - (\frac{\pi}{2} - y)}{2} \cdot \sin \frac{x + (\frac{\pi}{2} - y)}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{cases} \cos x - \sin(x - y) = 0, \\ \sin \frac{x - (\frac{\pi}{2} - y)}{2} = 0; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \cos x - \sin(x - y) = 0, \\ x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \end{cases} \right]$$

$$\left[\begin{cases} \cos x - \sin(x - y) = 0, \\ \sin \frac{x + (\frac{\pi}{2} - y)}{2} = 0; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \cos x - \sin(x - y) = 0, \\ x - y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases} \right]$$

Так как $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$\left[\begin{cases} \cos x - \sin(x - y) = 0, \\ x + y = \frac{\pi}{2}; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \cos x - \sin(x - y) = 0, \\ x - y = -\frac{\pi}{2}. \end{cases} \right]$$

Вторая система не имеет решений, а первая даёт единственную стационарную точку $M(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$.

2) Проверим достаточные условия экстремума (критерий Сильвестра):

$$\Delta_1 = z''_{xx} = (-\sin x - \cos(x - y)) \Big|_M = -\sqrt{3} < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \\ \cos \frac{\pi}{6} & -2 \cos \frac{\pi}{6} \end{vmatrix} > 0.$$

Следовательно, в точке M имеется строгий локальный максимум, равный $z_{\max} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

421. 1) Пусть F – какая-либо первообразная для подынтегральной функции. Найдём стационарные точки:

$$f'_x(x, y) = \left(\int_x^{xy} e^{t^2} dt \right)'_x = (F(xy) - F(x))'_x = e^{(xy)^2} y - e^{x^2} = 0,$$

$$f'_y(x, y) = \left(\int_x^{xy} e^{t^2} dt \right)'_y = (F(xy) - F(x))'_y = e^{(xy)^2} x = 0,$$

откуда $(0, 1)$ – единственная точка возможного экстремума.

2) Проверим достаточные условия экстремума:

$$f''_{xx}(x, y) = \left(e^{(xy)^2} y - e^{x^2} \right)'_x = \left(2xy^3 e^{(xy)^2} - 2xe^{x^2} \right) \Big|_{(0,1)} = 0,$$

$$f''_{xy}(x, y) = \left(e^{(xy)^2} y - e^{x^2} \right)'_y = \left(2x^2 y^2 e^{(xy)^2} + e^{(xy)^2} \right) \Big|_{(0,1)} = 1,$$

$$f''_{yy}(x, y) = \left(e^{(xy)^2} x \right)'_y = \left(2x^3 y e^{(xy)^2} \right) \Big|_{(0,1)} = 0,$$

тогда $d^2 f(0, 1) = f''_{xx}(0, 1)dx^2 + 2f''_{xy}(0, 1)dxdy + f''_{yy}(0, 1)dy^2 = 2dxdy$, т. е. является знакопеременной квадратичной формой, а значит, экстремума в данной точке нет.

422. Убедимся в том, что точка $M(1, 1)$ является критической точкой. Для этого выпишем необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 4y - 7 + 2a(x - 1) = 0, \\ z'_y = 3y^2 + 4x - 7 + 2a(y - 1) = 0. \end{cases}$$

Точка $M(1, 1)$ удовлетворяет этой системе и поэтому является критической.

Воспользуемся далее в этой точке критерием Сильвестра:

$$\Delta_2(M) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 + 2a & 4 \\ 4 & 6 + 2a \end{vmatrix} = \dots = 4(1 + a)(5 + a).$$

Проанализируем знак этого определителя:

1) при $a \in (-5, -1)$ имеем $\Delta_2(M) < 0$, экстремума нет;

2) при $a \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$ имеем $\Delta_2(M) > 0$, экстремум есть. Для уточнения вида экстремума исследуем знак $\Delta_1(M) = z''_{xx} = 2(3 + a)$. При $a < -3$ имеем $\Delta_1(M) < 0$, поэтому в точке – строгий локальный максимум, при $a > -3$ $\Delta_1(M) > 0$, поэтому, в точке имеется минимум. Таким образом, при $a \in (-\infty, -5)$ достигается максимум, при $a \in (-1, +\infty)$ – достигается минимум.

Ответ: 1) $a \in (-\infty, -5)$; 2) $a \in (-1, +\infty)$; 3) $a \in (-5, -1)$.

423. Необходимое условие экстремума приводит к системе

$$\begin{cases} u'_x = 2x + 2 = 0, \\ u'_y = 2y + 4 = 0, \\ u'_z = 2z - 6 = 0, \end{cases}$$

имеющей единственное решение – точку $M_0(-1, -2, 3)$. Вычислим главные миноры матрицы Гессе:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, в точке M_0 функция имеет строгий локальный минимум. Подставляя координаты точки в функцию, находим его значение $u_{min} = u(M_0) = -14$.

424. Необходимое условие экстремума приводит к системе

$$\begin{cases} f'_x = y + z = 0, \\ f'_y = x + z = 0, \\ f'_z = x + y = 0, \end{cases}$$

имеющей единственное решение – точку $M_0(0, 0, 0)$. Так как $f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{zz} = 0$, $f''_{xy} = f''_{yz} = f''_{xz} = 1$, то

$$\begin{aligned} d^2f &= f''_{xx}dx^2 + f''_{yy}dy^2 + f''_{zz}dz^2 + 2f''_{xy}dxdy + 2f''_{yz}dydz + 2f''_{xz}dxdz = \\ &= 2(dxdy + dydz + dxdz). \end{aligned}$$

Покажем, что в данном случае второй дифференциал является знакопеременной квадратичной формой. Действительно, если взять $dx = 0$, $dy = -dz \neq 0$, то получим $d^2f = -2dz^2 < 0$. Если же положить $dx = 0$, $dy = dz \neq 0$, то получим $d^2f = 2dz^2 > 0$. Это означает, что экстремума в точке M_0 у данной функции нет.

425. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} u'_x = 3x^2 + 12y = 0, \\ u'_y = 2y + 12x = 0, \\ u'_z = 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $M_1(0, 0, -1)$, $M_2(24, -144, -1)$. Вычислим $u''_{xx} = 6x$, $u''_{xy} = 12$, $u''_{yy} = 2$, $u''_{xz} = 0$, $u''_{yz} = 0$, $u''_{zz} = 2$.

а) В точке $M_1(0, 0, -1)$ имеем $u''_{xx} = 0$, поэтому критерий Сильвестра не применим. Рассмотрим тогда приращение функции

$$\begin{aligned} \Delta u(0, 0, -1) &= u(\Delta x, \Delta y, -1 + \Delta z) - u(0, 0, -1) = \\ &= \Delta x^3 + \Delta y^2 + (-1 + \Delta z)^2 + 12\Delta x\Delta y + 2(-1 + \Delta z) - \\ &- (0^3 + 0^2 + (-1)^2 + 12 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)) = \Delta x^3 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + 12\Delta x\Delta y. \end{aligned}$$

Покажем, что в этой точке нет экстремума. В самом деле, если взять $\Delta x = t^2 > 0$ (t — произвольное, отличное от нуля), $\Delta y = \Delta z = 0$, то получим $\Delta u(0, 0, -1) = t^6 > 0$. Но если взять $\Delta x = -t^2 < 0$, $\Delta y = \Delta z = 0$, то получим $\Delta u(0, 0, -1) = -t^6 < 0$. Следовательно, точка $M_1(0, 0, -1)$ не является экстремальной.

б) В точке $M_2(24, -144, -1)$ имеем $\Delta_1 = 144 > 0$, $\Delta_2 = 144 > 0$, $\Delta_3 = 288 > 0$, поэтому в этой точке функция имеет строгий локальный минимум, равный $u_{\min} = -6913$.

426. 1) Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} u'_x = 6x - 2y - 8 = 0, \\ u'_y = 2y - 2x = 0, \\ u'_z = 3z^2 - 27 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим точки $M_1(2, 2, 3)$, $M_2(2, 2, -3)$.

2) Воспользуемся критерием Сильвестра. В точке M_1 имеем:

$$\Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 144 > 0.$$

Следовательно, $d^2u(M_1)$ положительно определённая квадратичная форма от переменных dx, dy, dz . Значит, в точке M_1 функция имеет локальный минимум, равный $u(M_1) = -50$. В точке M_2 имеем:

$$\Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = -144 < 0.$$

Критерий Сильвестра не даёт ответа. Выпишем второй дифференциал в этой точке: $d^2u(M_2) = 6dx^2 + 2dy^2 - 18dz^2 - 4dxdy$. Нетрудно видеть, что эта квадратичная форма — знакопеременная. В самом деле, если положить $dx \neq 0$,

$dy = dz = 0$, то $d^2u(M_2) = 6dx^2 > 0$, а если положить $dx = dy = 0$, $dz \neq 0$, то $d^2u(M_2) = -18dz^2 < 0$. Следовательно, в точке M_2 функция не имеет локального экстремума. Ответ: единственный локальный минимум $u_{\min} = u(2, 2, 3) = -50$.

427. 1) Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} u'_x = 4x - y + 2z = 0, \\ u'_y = -x - 1 + 3y^2 = 0, \\ u'_z = 2x + 2z = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим две точки возможного экстремума: $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $M_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

2) Проверим достаточные условия экстремума. Воспользуемся критерием Сильвестра и найдём главные миноры матрицы Гессе вторых производных. В точке M_1 имеем:

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

Следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный минимум (его значение найдите самостоятельно). Исследуем наличие экстремума в точке M_2 :

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13 < 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 < 0.$$

Следовательно, $d^2u(M_2)$ не является знакоопределённой квадратичной формой от dx , dy , dz . Нетрудно видеть, что эта квадратичная форма – знакопеременная. Следовательно, в точке M_2 функция не имеет локального экстремума.

428. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} u'_x = -2x + y - 2z + 11 = 0, \\ u'_y = -10y + x + 2z + 2 = 0, \\ u'_z = -6z - 2x + 2y + 18 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $M_0(4, 1, 2)$. Выпишем в этой точке матрицу Гессе

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 2 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

и найдём её главные миноры:

$$\Delta_1 = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -10 \end{vmatrix} = 19 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 2 \\ -2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -74 < 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, в точке M_0 функция имеет локальный максимум. Подставляя координаты точки в функцию, находим его значение $f_{max} = f(M_0) = 51$.

429. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} u'_x = -4x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ u'_y = -2y - 2x - 2z + 8 = 0, \\ u'_z = 4z + 3x - 2y + 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y + 3z = 4, \\ x + y + z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = -1. \end{cases}$$

Решая систему, находим единственную стационарную точку $M_0(-1, 3, 2)$. Выпишем в этой точке матрицу Гессе

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

и найдём её главные миноры:

$$\Delta_1 = -4 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 74 > 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, в точке M_0 функция не имеет локального экстремума.

430. 1) Найдём критические точки функции:

$$\begin{cases} u'_x = 6x^2yz - 2x = 0, \\ u'_y = 2x^3z - 2y = 0, \\ u'_z = 2x^3y - 2z = 0, \end{cases}$$

откуда определяем пять точек: $M_0(0, 0, 0)$, $M_1(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $M_2(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $M_3(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $M_4(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

2) Так как функция дважды дифференцируема в $\mathbb{R}^3$, то вычислим второй дифференциал и установим его знак в каждой из стационарных точек:

$$d^2u = 12xyzdx^2 - 2dy^2 - 2dz^2 + 12x^2zdx dy + 12x^2ydx dz + 4x^3dy dz.$$

В точке M_0 имеем: $d^2u(M_0) = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dz^2 < 0$. Так как $d^2u(M_0)$ является отрицательно определённой квадратичной формой, то в этой точке функция имеет строгий локальный максимум, причём $u(0, 0, 0) = 0$.

В точке M_1 имеем: $d^2u(M_1) = 2dx^2 - 2dy^2 - 2dz^2 + 4\sqrt{3}dx dy + 3\sqrt{3}dx dz + 4dy dz$. Применим критерий Сильвестра для анализа знака этой квадратичной формы. Выпишем матрицу этой формы и её главные миноры:

$$\Delta_1 = u''_{xx} = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} < 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{vmatrix} > 0.$$

Это означает, что данная квадратичная форма знакопеременная, следовательно, в точке M_1 функция не имеет экстремума (M_1 есть седловая точка функции).

Точно так же устанавливается, что точки M_2 , M_3 и M_4 также являются седловыми точками функции. Таким образом, у функции есть единственная экстремальная точка – точка максимума M_0 .

431. Найдём стационарные точки заданной функции, т. е. точки, в которых выполняется необходимое условие существования экстремума:

$$\begin{cases} u'_x = -2x - 4 = 0, \\ u'_y = -6y + 6 = 0, \\ u'_z = 3z^2 - 3z = 0, \end{cases}$$

откуда находим две точки $M_1(-2, 1, 0)$ и $M_2(-2, 1, 1)$.

Для проверки достаточных условий экстремума в стационарных точках воспользуемся критерием Сильвестра.

1) В точке $M_1(-2, 1, 0)$ имеем:

$$\Delta_1 = f''_{xx} = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -36 < 0.$$

Так как $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, то в точке $M_1(-2, 1, 0)$ функция имеет максимум, при этом $u(M_1) = 9$.

2) В точке $M_2(-2, 1, 1)$ имеем:

$$\Delta_1 = f''_{xx} = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 36 > 0.$$

Так как $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, то в точке $M_2(-2, 1, 1)$ функция не имеет экстремума (седловая точка).

432. 1) Используя необходимое условие экстремума, найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} u'_x = \cos x - \cos(x+y+z) = 0, \\ u'_y = \cos y - \cos(x+y+z) = 0, \\ u'_z = \cos z - \cos(x+y+z) = 0, \end{cases}$$

откуда получаем

$$\begin{cases} \cos x = \cos y = \cos z, \\ \cos x = \cos(x+y+z), \\ x, y, z \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z, \\ \cos x = \cos(3x), \\ x, y, z \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Решив систему, находим три стационарные точки: $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $M_3(\pi, \pi, \pi)$.

2) Проверим достаточные условия в каждой из этих точек. Вычислим частные производные второго порядка:

$$f''_{xx} = -\sin x + \sin(x+y+z), \quad f''_{yy} = -\sin y + \sin(x+y+z),$$

$$f''_{zz} = -\sin z + \sin(x+y+z), \quad f''_{xy} = f''_{yz} = f''_{xz} = \sin(x+y+z).$$

а) В точке $M_1(0, 0, 0)$ имеем $\Delta_1 = f''_{xx} = 0$, следовательно, критерием Сильвестра пользоваться нельзя. Исследуем знак полного приращения функции:

$$\begin{aligned} \Delta u(0, 0, 0) &= u(\Delta x, \Delta y, \Delta z) - u(0, 0, 0) = u(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \\ &= \sin \Delta x + \sin \Delta y + \sin \Delta z - \sin(\Delta x + \Delta y + \Delta z). \end{aligned}$$

Заметим, что так как функция определена в кубе $x, y, z \in [0, \pi]$, то в точке $M_1(0, 0, 0)$ приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ могут принимать лишь неотрицательные значения такие, что $0 < \Delta x + \Delta y + \Delta z < \pi$ (одновременно не обращаясь в 0). Далее воспользуемся неравенством

$$\left| \sin \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k,$$

где $0 \leq x_k \leq \pi$, $k = \overline{1, n}$, которое доказывается методом математической индукции. Получаем, что

$$|\sin(\Delta x + \Delta y + \Delta z)| \leq \sin \Delta x + \sin \Delta y + \sin \Delta z, \quad \text{т. е.} \quad \Delta u(0, 0, 0) \geq 0.$$

Следовательно, в точке M_1 имеется краевой минимум, равный $u_{\min} = u(0, 0, 0) = 0$.

б) В точке $M_2(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ по критерию Сильвестра имеем:

$$\Delta_1 = f''_{xx} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} < 0,$$

следовательно, в точке M_2 имеется локальный максимум, равный $u_{\max} = u(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 4$.

в) В точке $M_3(\pi, \pi, \pi)$ имеем $\Delta_1 = f''_{xx} = 0$, значит, критерий Сильвестра не применим. Исследуем знак полного приращения функции. Так как функция определена в кубе $x, y, z \in [0, \pi]$, то в точке $M_3(\pi, \pi, \pi)$ приращения аргументов могут принимать лишь неположительные значения (по-прежнему будем считать $\Delta x \geq 0$, $\Delta y \geq 0$, $\Delta z \geq 0$, где $0 < \Delta x + \Delta y + \Delta z < \pi$, но брать перед ними знак минус):

$$\begin{aligned} \Delta u(\pi, \pi, \pi) &= u(\pi - \Delta x, \pi - \Delta y, \pi - \Delta z) - u(\pi, \pi, \pi) = \\ &= u(\pi - \Delta x, \pi - \Delta y, \pi - \Delta z) = \sin(\pi - \Delta x) + \sin(\pi - \Delta y) + \sin(\pi - \Delta z) - \\ &\quad - \sin((\pi - \Delta x) + (\pi - \Delta y) + (\pi - \Delta z)) = \\ &= \sin \Delta x + \sin \Delta y + \sin \Delta z - \sin(\Delta x + \Delta y + \Delta z) \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в точке M_3 имеется краевой минимум, равный $u_{\min} = u(\pi, \pi, \pi) = 0$.

433. Квадрат расстояния от точки $A(1, 2, 3)$ до произвольной точки плоскости записывается в виде функции

$$u = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (2x + 2y - 9 - 3)^2.$$

Решение задачи сводится к отысканию минимального значения этой функции. Найдём частные производные функции $u(x, y)$, приравняем их к нулю и решим получившуюся систему уравнений

$$\begin{cases} u'_x = 10x + 8y - 50 = 0, \\ u'_y = 10y + 8x - 52 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3}, \\ y = \frac{10}{3}. \end{cases}$$

Найдём $d^2u = 10dx^2 + 16dxdy + 10dy^2 > 0$, следовательно, в стационарной точке имеется локальный минимум, равный 4. Извлекая квадратный корень, приходим к ответу: 2.

434. Так как функция дважды непрерывно дифференцируема, то вычислим второй дифференциал: $f'_x = 4x + \cos(x + y)$, $f'_y = 2y + \cos(x + y)$, $f''_{xx} = 4 - \sin(x + y)$, $f''_{xy} = -\sin(x + y)$, $f''_{yy} = 2 - \sin(x + y)$, поэтому

$$\begin{aligned} d^2f(x, y) &= (4 - \sin(x + y))dx^2 - 2\sin(x + y)dxdy + (2 - \sin(x + y))dy^2 = \\ &= 4dx^2 + 2dy^2 - \sin(x + y)(dx + dy)^2. \end{aligned}$$

Учитывая $-1 \leq \sin(x+y) \leq 1$, оценим знак $d^2f(x, y)$:

$$4dx^2 + 2dy^2 - (dx + dy)^2 \leq d^2f(x, y) \leq 4dx^2 + 2dy^2 + (dx + dy)^2.$$

Поскольку $4dx^2 + 2dy^2 - (dx + dy)^2 = 2dx^2 + (dx - dy)^2 > 0$ при условии $dx^2 + dy^2 \neq 0$, то $d^2f(x, y) > 0$ и, следовательно, функция строго выпукла вниз на всей плоскости.

435. Так как функция дважды непрерывно дифференцируема, то вычислим второй дифференциал: $f'_x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$,

$$f''_{xx} = \frac{1+y^2}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad f''_{xy} = -\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad f''_{yy} = \frac{1+x^2}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

поэтому

$$\begin{aligned} d^2f(x, y) &= \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}((1+y^2)dx^2 - 2xydx dy + (1+x^2)dy^2) = \\ &= \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}((xdy - ydx)^2 + dx^2 + dy^2) > 0 \end{aligned}$$

при условии $dx^2 + dy^2 \neq 0$, следовательно, функция строго выпукла вниз на всей плоскости.

9 СЕМИНАР: Дифференцирование и нахождение экстремумов неявно заданных функций

«Как было очень правильно написано в одной из методических книг по математике: сначала ты пойми, что я тебе говорю, а потом я тебе объясню, зачем это нужно».

Владимир Андреевич Успенский, доктор физико-математических наук, профессор мехмата МГУ.

С целью защиты авторских прав НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

При решении практических задач часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда переменная u , являющаяся по смыслу функцией аргументов $x_1, \dots, x_m$, задаётся при помощи функционального уравнения

$$F(u, x_1, \dots, x_m) = 0,$$

не разрешённого относительно переменной u . В этом случае говорят, что u как функция переменных $x_1, \dots, x_m$ задана *неявно*.

В связи с этим возникает вопрос о том, при каких условиях в окрестности заданной точки данное функциональное уравнение однозначно разрешимо относительно u , т. е. однозначно определяет явную функцию $u = f(x_1, \dots, x_m)$, а также при каких условиях эта явная функция будет непрерывной и дифференцируемой.

9.1 Теоремы о существовании и единственности дифференцируемой функции, заданной неявно

Функцию одной действительной переменной $y = f(x)$ мы называли заданной *неявным образом* (*неявно*), если она задана при помощи уравнения $F(x, y) = 0$, неразрешённого относительно переменной y . При этом имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (*существования и единственности однозначной дифференцируемой функции одной переменной, заданной неявно*). Пусть:

- 1) функция $F(x, y)$ обращается в нуль в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$;
- 2) $F(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ определены и непрерывны в окрестности точки M_0 ;
- 3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 существует единственная однозначная и непрерывная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая уравнению $F(x, y) = 0$ и такая, что $y_0 = f(x_0)$.

Если, сверх того,

4) функция $F(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, то функция $y = f(x)$ также дифференцируема в окрестности точки x_0 и её производная $\frac{dy}{dx}$ может быть найдена из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y},$$

а дифференциал 1-го порядка, соответственно, по формуле

$$dy = -\frac{F'_x}{F'_y} dx.$$

Функции нескольких переменных также могут определяться неявными уравнениями (системами неявных уравнений), и возникает естественный вопрос о способах исследования свойств таких функций. Ниже мы получим ответ на вопрос, при каких условиях такая функция будет однозначной, когда она будет непрерывна или дифференцируема, и как найти её частные производные или дифференциалы любого порядка.

Начнём с простейшего случая функции $z = f(x, y)$ двух переменных, заданной неявно уравнением

$$F(x, y, z) = 0.$$

Теорема 2 (существования и единственности однозначной дифференцируемой функции двух переменных, заданной неявно). Пусть:

- 1) функция $F(x, y, z)$ обращается в нуль в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$;
- 2) функции $F(x, y, z)$ и $F'_z(x, y, z)$ определены и непрерывны в окрестности точки M_0 ;
- 3) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Тогда в некоторой достаточно малой окрестности точки $\bar{M}_0(x_0, y_0)$ существует единственная однозначная и непрерывная функция $z = f(x, y)$, удовлетворяющая уравнению $F(x, y, z) = 0$ и такая, что $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Если, сверх того,

4) функция $F(x, y, z)$ дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то функция $z = f(x, y)$ также дифференцируема в окрестности точки $\bar{M}_0(x_0, y_0)$ и её частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 & \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 & \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \end{cases} \quad (1)$$

полученной дифференцированием исходного неявного уравнения по переменным x и y , а дифференциал 1-го порядка, соответственно, по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Замечание. Если функция $F(x, y, z)$ дифференцируема достаточное количество раз, то функция $z = f(x, y)$ также будет дифференцируема соответствующее число раз, причём производные высших порядков от этой функции z вычисляются последовательным дифференцированием уравнений (1).

Можно сформулировать аналогичную теорему в общем случае для функции m переменных $y = f(x_1, \dots, x_m)$, заданной неявно уравнением $F(x_1, \dots, x_m, y) = 0$ [21, Гл. 6, § 2, п. 208].

Рассмотрим примеры.

Пример 136. Найти дифференциал du и частную производную u''_{xy} , если функция задана неявно уравнением

$$u^2 + x^4 + y^4 - 1 = 0.$$

Решение. Не обязательно выводить (запоминать) необходимые формулы (1) в общем виде. Также не будем пытаться выражать явно u из данного уравнения. Продемонстрируем общий подход к нахождению первого дифференциала и частной производной второго порядка. Этот подход назовём «непосредственное дифференцирование».

Так как для вычисления первого дифференциала нам понадобятся обе частные производные первого порядка, то найдём f'_x , продифференцировав исходное уравнение по x (используя теорему о производной сложной функции), а f'_y найдём, продифференцировав это же уравнение по y :

$$2u \cdot u'_x + 4x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad u'_x = -\frac{2x^3}{u} \quad (\text{аналогично } u'_y = -\frac{2y^3}{u}).$$

Заметьте, обе производные были найдены без особых усилий. Тогда для первого дифференциала в точке (x, y) имеем выражение

$$du = u'_x dx + u'_y dy = -\frac{2x^3}{u} dx - \frac{2y^3}{u} dy.$$

Для вычисления u''_{xy} продифференцируем полученную производную u'_x ещё раз – по переменной y :

$$u''_{xy} = (u'_x)'_y = \left(-\frac{2x^3}{u}\right)'_y = -2x^3 \cdot \left(\frac{1}{u}\right)'_y = -2x^3 \cdot \left(-\frac{1}{u^2} \cdot u'_y\right) = -\frac{4x^3 y^3}{u^3}.$$

Обратим внимание, что полученные частные производные (а следовательно, и дифференциал) зависят не только от x и y , но и от $u = u(x, y)$. $\square$

Пример 137. Найти частные производные z'_x, z'_y неявной функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением $z^3 + 3xyz = 1$.

Решение. *1-й способ* (по стандартным формулам). Обозначим $F(x, y, z) \equiv z^3 + 3xyz - 1$, тогда $F'_x = 3yz$, $F'_y = 3xz$, $F'_z = 3z^2 + 3xy$ и по формулам (1), в предположении $z^2 + xy \neq 0$, сразу получим

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz}{z^2 + xy}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{xz}{z^2 + xy}.$$

2-й способ (непосредственное дифференцирование). Продифференцируем уравнение по переменной x с учётом, что y не зависит от x , а z есть функция, зависящая от x :

$$(z^3 + 3xyz - 1)'_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3z^2 \cdot z'_x + 3y \cdot (xz)'_x = 0$$

$$z^2 \cdot z'_x + y \cdot (z + x \cdot z'_x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z^2 + xy)z'_x = -yz,$$

откуда при условии $z^2 + xy \neq 0$ находим $z'_x = -\frac{yz}{z^2 + xy}$. Аналогично находится и вторая частная производная z'_y .

3-й способ (через нахождение первого дифференциала). Возьмём дифференциал от левой и правой частей исходного уравнения и получим:

$$d(z^3 + 3xyz) = d(1) \quad \Leftrightarrow \quad 3z^2 dz + 3(x y dz + x z dy + y z dx) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$yz dx + xz dy + (z^2 + xy) dz = 0,$$

откуда (при условии $z^2 + xy \neq 0$) находим

$$dz = -\frac{yz}{z^2 + xy} dx - \frac{xz}{z^2 + xy} dy.$$

Сопоставляя полученное выражение с выражением $dz = z'_x dx + z'_y dy$, находим обе искомые частные производные как коэффициенты при dx и dy :

$$z'_x = -\frac{yz}{z^2 + xy}, \quad z'_y = -\frac{xz}{z^2 + xy}. \quad \square$$

Пример 138. [8, № 3371] Найти y' и y'' , а также dy и d^2y , если функция $y(x)$ задана неявно уравнением

$$x^2 + 2xy - y^2 = a^2.$$

Решение. Обозначим $F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - a^2$. Если, как в этой постановке задачи, требуется найти и производные, и дифференциалы, то возможны два алгоритма действия: а) сначала найти производные, а затем с их помощью вычислить дифференциалы соответствующего порядка; б) наоборот, вначале найти дифференциалы, а затем уже, используя их, вычислить производные.

Решение 1. Найдём производные, а затем с их помощью – дифференциалы.

1-й способ (с использованием стандартных формул). Для нахождения y' воспользуемся формулой:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x + 2y}{2x - 2y} = \frac{x + y}{y - x}.$$

Тогда для первого дифференциала получим:

$$dy = y' dx = \frac{x + y}{y - x} dx.$$

2-й способ (непосредственное дифференцирование). Продифференцируем неявное уравнение по x , учитывая, что $y = y(x)$:

$$\begin{aligned}(x^2 + 2xy - y^2)'_x &= (a^2)'_x \Leftrightarrow 2x + 2(y + xy') - 2yy' = 0 \\ \Leftrightarrow y'(x - y) &= -x - y,\end{aligned}$$

откуда при условии $y \neq x$ получаем тот же результат для y' .

Для вычисления второй производной при $y \neq x$ также имеем две возможности.

1-й способ (по определению 2-й производной $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$):

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{x + y}{y - x} \right)'_x = \frac{(x + y)'_x \cdot (y - x) - (x + y) \cdot (y - x)'_x}{(y - x)^2} = \\ &= \frac{(1 + y')(y - x) - (x + y)(y' - 1)}{(y - x)^2} = \frac{(1 + \frac{x+y}{y-x})(y - x) - (x + y)(\frac{x+y}{y-x} - 1)}{(y - x)^2} = \\ &= \frac{2(y^2 - 2xy - x^2)}{(y - x)^3} = -\frac{2a^2}{(y - x)^3}.\end{aligned}$$

2-й способ (непосредственное дифференцирование). Продифференцируем уравнение $x + (y + xy') - yy' = 0$, полученное в результате однократного дифференцирования, второй раз:

$$\begin{aligned}1 + y' + (y' + xy'') - ((y')^2 + yy'') &= 0, \\ y''(x - y) &= (y')^2 - 2y' - 1 \Leftrightarrow y'' = \frac{1 + 2y' - (y')^2}{y - x} \\ y'' &= \frac{1 + 2 \cdot \frac{x + y}{y - x} - \left(\frac{x + y}{y - x} \right)^2}{y - x} = \frac{2(y^2 - 2xy - x^2)}{(y - x)^3} = -\frac{2a^2}{(y - x)^3}.\end{aligned}$$

Тогда для 2-го дифференциала имеем:

$$d^2y = y'' dx^2 = -\frac{2a^2}{(y - x)^3} dx^2 \quad (y \neq x).$$

Решение 2. Найдём дифференциалы, а затем с их помощью – производные. Для нахождения первого дифференциала продифференцируем один раз уравнение (т. е. возьмём дифференциалы от левой и правой частей уравнения):

$$\begin{aligned} d(x^2 + 2xy - y^2) = 0 &\Leftrightarrow 2xdx + 2(xdy + ydx) - 2ydy = 0 \\ \Leftrightarrow (y - x)dy &= (x + y)dx \quad \Leftrightarrow dy = \frac{x + y}{y - x}dx. \end{aligned}$$

Отсюда производная находится как «коэффициент» при дифференциале dx : $y' = \frac{x + y}{y - x}$ ($y \neq x$).

Теперь найдём d^2y . Для этого ещё раз продифференцируем (в смысле – возьмём дифференциал) уравнение $(y - x)dy = (x + y)dx$ по правилу дифференциала от произведения двух множителей:

$$\begin{aligned} d((y - x)dy) &= d((x + y)dx) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d(y - x)dy &+ (y - x)d^2y = d(x + y)dx + (x + y)d^2x. \end{aligned}$$

Поскольку x – независимая переменная, то $d^2x = 0$ и в результате получим

$$\begin{aligned} d(y - x)dy + (y - x)d^2y &= d(x + y)dx \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (dy - dx)dy &+ (y - x)d^2y = (dx + dy)dx, \end{aligned}$$

откуда можно выразить d^2y : $d^2y = \frac{dx^2 + 2dxdy - dy^2}{y - x}$. Подставим в полученное выражение $\frac{x + y}{y - x}dx$ вместо dy :

$$\begin{aligned} d^2y &= \frac{dx^2 + 2\frac{x+y}{y-x}dx^2 - \left(\frac{x+y}{y-x}dx\right)^2}{y - x} \quad \Leftrightarrow \\ d^2y &= \frac{2(y^2 - 2xy - x^2)}{(y - x)^3}dx^2 = -\frac{2a^2}{(y - x)^3}dx^2. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 139. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением

$$F(t_1, t_2) = 0, \quad \text{где } t_1 = t_1(x, y, z), \quad t_2 = t_2(x, y, z).$$

Решение. Продифференцируем неявное уравнение один раз по переменной x с учётом того, что z – зависимая переменная:

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} \cdot \frac{dt_1}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t_2} \cdot \frac{dt_2}{dx} = 0,$$

где полные производные $\frac{dt_1}{dx} = \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial t_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dt_2}{dx} = \frac{\partial t_2}{\partial x} + \frac{\partial t_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$. Подставляя, получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} \cdot \left(\frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial t_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial F}{\partial t_2} \cdot \left(\frac{\partial t_2}{\partial x} + \frac{\partial t_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0,$$

откуда находим искомую производную $\frac{\partial z}{\partial x}$. $\square$

[illegible]
$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = 0 \quad (i = \overline{1, n}),$$

Пример 140. Найти: а) $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$; б) dy, dz , если функции $y(x)$ и $z(x)$ заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2y + \ln z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y'_x + \frac{1}{z} \cdot z'_x = 0, \\ 2x + 2y \cdot y'_x + 2z \cdot z'_x = 0. \end{cases}$$
$$y'_x = \frac{x(1-2z^2)}{2z^2-y}, \quad z'_x = \frac{2xz(y-1)}{2z^2-y}.$$
$$\begin{cases} 2x dx + 2dy + \frac{1}{z} \cdot dz = 0, \\ 2x dx + 2y dy + 2z dz = 0. \end{cases}$$

Решая систему относительно дифференциалов dy и dz , получим тот же результат:

$$dy = \frac{x(1-2z^2)}{2z^2-y} dx, \quad dz = \frac{2xz(y-1)}{2z^2-y} dx. \quad \square$$

9.3 Экстремум неявно заданной функции

*«Разве ты не заметил, что способный к математике
изошрён во всех науках в природе?»*

*Платон (428–348 до н. э.) — древнегреческий философ,
ученик Сократа, учитель Аристотеля.*

Решение задачи о безусловном экстремуме неявно заданной функции почти ничем не отличается от случая явной функции, всё различие заключено лишь в способе нахождения производных и дифференциалов. Их вычисление облегчается тем, что второй дифференциал нужен лишь в стационарной точке, а это заметно упрощает выкладки.

Пусть неявная функция $u = f(M)$, $M \in D$, определяется уравнением $F(x_1, \dots, x_m; u) = 0$. Пусть функция u дважды непрерывно дифференцируема в D . Тогда в стационарной точке $M_0 \in D$ справедливы равенства

$$du(M_0) = -\frac{1}{F'_u} (F'_{x_1} dx_1 + F'_{x_2} dx_2 + \dots + F'_{x_m} dx_m) = 0, \quad (1)$$

$$F(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ, u_0) = 0, \quad \text{где } u_0 = f(M_0).$$

При этом стационарные точки могут быть найдены из системы

$$F'_{x_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad F(x_1, \dots, x_m, u) = 0.$$

Дифференцируя равенство (1) и учитывая, что в стационарной точке $du = 0$, получаем формулу для второго дифференциала неявно заданной функции (в стационарной точке):

$$d^2u = -\frac{1}{F'_u} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j. \quad (2)$$

Если $d^2u(M_0) > 0$, то функция u имеет в этой точке локальный минимум, а если $d^2u(M_0) < 0$, то локальный максимум.

В частности, для функции двух переменных $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, формула (2) принимает вид

$$d^2z = -\frac{1}{F'_z} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 \right). \quad (2')$$

Рассмотрим задачу.

Пример 141. [8, № 3651] Найти экстремумы функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

Решение. 1) Найдём точки возможного экстремума. Для этого продифференцируем один раз неявное уравнение (возьмём полный дифференциал):

$$\begin{aligned} d(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ (2x - 2)dx + (2y + 2)dy + (2z - 4)dz &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Выразим (при условии $z \neq 2$) из этого равенства дифференциал dz исследуемой неявной функции:

$$dz = \frac{x-1}{2-z}dx + \frac{y+1}{2-z}dy.$$

Приравнивая его к нулю, получаем систему

$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ y + 1 = 0, \\ z \neq 2, \end{cases}$$

из которой находим $x = 1, y = -1$. Подставляя в исходное уравнение, получим $z^2 - 4z - 12 = 0$, откуда находим две стационарные точки $M_1(1, -1, 6)$ и $M_2(1, -1, -2)$. Это означает, что существуют две однозначные неявные функции, удовлетворяющие исходному уравнению.

2) В каждой из найденных точек возможного экстремума проверим выполнение достаточного условия и выясним вопрос о существовании и характере экстремумов в этих точках. Чтобы вычислить d^2z , достаточно ещё раз продифференцировать равенство (3):

$$d((2x - 2)dx) + d((2y + 2)dy) + d((2z - 4)dz) = 0.$$

Распишем подробно:

$$d(2x - 2)dx + (2x - 2)d^2x + d(2y + 2)dy + (2y + 2)d^2y + d(2z - 4)dz + (2z - 4)d^2z = 0.$$

Так как z – функция, а x и y – независимые переменные, то $d^2x = 0$ и $d^2y = 0$ и получаем

$$\begin{aligned} 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + (2z - 4)d^2z &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 + (z - 2)d^2z &= 0. \end{aligned}$$

Нас интересует стационарная точка, в которой $dz = 0$, поэтому

$$dx^2 + dy^2 + (z - 2)d^2z = 0, \text{ откуда } d^2z = \frac{1}{2-z}dx^2 + \frac{1}{2-z}dy^2.$$

В точке $M_1(1, -1, 6)$ имеем $d^2z = -\frac{1}{4}dx^2 - \frac{1}{4}dy^2 < 0$, а в точке $M_2(1, -1, -2)$ имеем $d^2z = \frac{1}{4}dx^2 + \frac{1}{4}dy^2 > 0$. Следовательно, в первой из точек имеем локальный максимум, равный 6, а во второй – минимум, равный (-2) .

Замечание. У этой задачи есть простой геометрический смысл, быстро приводящий к решению. В самом деле, выделяя полные квадраты, приведём исходное уравнение к виду

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 16.$$

Данное уравнение определяет сферу радиуса 4 с центром в точке $(1, -1, 2)$. Хорошо видно, почему в задаче два решения: в верхней точке сферы достигается максимум $z_{\max} = 6$, а в нижней – минимум $z_{\min} = -2$. $\square$

9.4 Задачи для самостоятельного решения

Задачи на неявно заданные функции одной переменной:

№436. [8, № 3364] Пусть дано уравнение

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1) \quad \text{и} \quad y = y(x) \quad (x \in [-1, 1]) \quad (2)$$

есть однозначная функция, удовлетворяющая уравнению (1).

- 1) Сколько однозначных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?
- 2) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?
- 3) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1), если: а) $y(0) = 1$; б) $y(1) = 0$?

№437. [8, № 3365] Пусть дано уравнение

$$x^2 = y^2 \quad (1) \quad \text{и} \quad y = y(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

есть однозначная функция, удовлетворяющая уравнению (1).

- 1) Сколько однозначных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?
- 2) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?
- 3) Сколько однозначных дифференцируемых функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?
- 4) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1), если: а) $y(1) = 1$; б) $y(0) = 0$?
- 5) Сколько однозначных непрерывных функций $y = y(x)$ ($1 - \delta < x < 1 + \delta$) удовлетворяет уравнению (1), если $y(1) = 1$ и δ достаточно мало?

№438. [3, № 3145] Найти производную $\frac{dy}{dx}$ неявно заданной функции

$$x^3 y - y^3 x = a^4.$$

№439. [3, № 3155] Найти производную $\frac{dy}{dx}$ неявно заданной функции

$$y^x = x^y.$$

№440. Найти y' , если функция $y(x)$ задана неявно соотношением

$$e^{xy} - x - y = 0.$$

№441. [8, № 3372] Найти y' , y'' для функции $y = y(x)$, заданной уравнением

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

№442. Найти значение $y'(0)$ и $y''(0)$ неявной функции $y(x)$, заданной уравнением

$$xe^y + ye^x = 0.$$

Задачи на дифференцирование функций двух переменных, заданных неявно одним уравнением:

№443. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $x^2 + x \sin y + 2z + e^z = 0$.

№444. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением

$$x^2yz + zx^2 + yz^3 = 0.$$

№445. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением

$$\ln(x^2 \sin z + y \cos z) = 0.$$

№446. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением

$$F(xyz, x + y) = 0,$$

где F – некоторая дифференцируемая функция.

№447. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$F(x + y + z, y + z, z) = 0.$$

№448. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$F(xyz, yz, z) = 0.$$

№449. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$xyz + x^2 + y^3 + z^4 = 0.$$

№450. Найти первый дифференциал в точке $M(-1, 0, \pi)$ неявной функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением

$$\sin z - xyz + x^2 = 0.$$

№451. Найти частные производные и дифференциал 1-го порядка неявно заданной функции $z = z(x, y)$:

$$x^2 + y + zxy^2 = e^z.$$

№452. Найти первый и второй дифференциалы функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$e^z = x + y + z.$$

№453. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если функция $z = f(x, y)$ задана неявно уравнением

$$\cos z + 2xyz = 1$$

(ответ представить в виде одной дроби).

№454. Найти частные производные и дифференциал 2-го порядка неявно заданной функции $z = z(x, y)$:

$$x + 2y + z = \ln z.$$

№455. [8, № 3383] Для функции $z = z(x, y)$ найти частные производные 1-го и 2-го порядков, если

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

№456. [8, № 3384] Найти частные производные и дифференциалы 1-го и 2-го порядков неявно заданной функции $z = z(x, y)$:

$$z^3 - 3xyz = a^3.$$

№457. [8, № 3390] Найти dz и d^2z , если

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

№458. Найти первые и вторые производные неявно заданной функции $z(x, y)$, если

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sin z.$$

№459. [10, с. 35] Найти частные производные первого порядка функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$F(xy, yz, zx) = 0.$$

№460. Найти dz и d^2z , если

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1.$$

№461. [8, № 3398.2(a)] Найти d^2z , если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением

$$F(x + z, y + z) = 0.$$

№462. [8, № 3398.2(б)] Найти d^2z , если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0.$$

№463. [8, № 3398.1] Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $F(xz, yz) = 0$.

№464. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1; 1)$ до членов 2-го порядка включительно неявную функцию $z(x, y)$, определяемую уравнением $z^3 + 3yz - 4x = 0$, если $z(1, 1) = 1$.

Задачи на дифференцирование неявных функций, заданных системой уравнений:

№465. [8, № 3401] Найти $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$, если функции $x(z)$ и $y(z)$ заданы системой

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

№466. Найти $\frac{dz}{dx}, \frac{dy}{dx}$, если функции $z(x)$ и $y(x)$ заданы системой

$$\begin{cases} x^2 + 2y + \ln z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

№467. Найти частные производные 1-го порядка неявно заданных функций $x(z)$ и $y(z)$, определяемых системой

$$\begin{cases} 2xyz - y^2 - x^2 = a^2, \\ xy + z^2 + xz = b^2. \end{cases}$$

№468. Найти частные производные 1-го порядка неявно заданных функций $x(z)$ и $y(z)$, определяемых системой

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = a^2, \\ xy - yz + xz = b^2. \end{cases}$$

№469. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ функций $y(x)$ и $z(x)$, заданных неявно системой уравнений

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = a, \\ x^3 + y^3 + z^3 = b. \end{cases}$$

№470. [10, с.35] Найти частные производные u'_x и v'_x функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, заданных неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x(u^2 + v^2) - uy = 2, \\ xv - y(u^2 + v^2) = 1. \end{cases}$$

№471. [10, с.36] Найти $dz(1, 1)$ функции $z = 2u + v$, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} u + \ln v = x, \\ v - \ln u = y. \end{cases}$$

№472. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ независимых переменных x и y определены равенствами

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1, \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x. \end{cases}$$

Найти du , dv , d^2u , d^2v в точке $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ при $u_0 = v_0 = 0$.

№473. [8, №3408(a)] Найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $u = 1$, $v = 1$, функции $z = z(x, y)$, заданной неявно системой

$$\begin{cases} x = u + \ln v, \\ y = v - \ln u, \\ z = 2u + v. \end{cases}$$

№474. [5, Пример №8.29] Найти dz , d^2z функции $z = z(x, y)$, если

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = au + bv. \end{cases}$$

№475. [8, №3402] Найти производные $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$ при $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, если

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

№476. Пусть $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t^2 + \frac{1}{t^2}$, $z = t^3 + \frac{1}{t^3}$. Найти

$$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}.$$

№477. Найти dy , dz , если функции $y = f(x)$, $z = g(x)$ заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

№478. Найти dx , dy , если функции $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ заданы неявно системой

$$\begin{cases} F(x, y) = u, \\ G(x, y) = v. \end{cases}$$

№479. Найти du , если функции $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ заданы неявно системой

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

№480. [3, № 3180] Найти $\frac{dy}{dx}$, если

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

№481. Функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} uv = 3x - 2y + z, \\ v^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

- 1) Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$.
- 2) Доказать выполнение тождества $x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Задачи на нахождение экстремумов неявно заданных функций:

№482. [8, № 3651] Найти экстремальные значения заданной неявно функции $z = z(x, y)$:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

№483. Найти экстремумы функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0.$$

№484. Исследовать на локальные экстремумы функцию $z = f(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z + 5 = 0.$$

№485. [8, № 3652] Найти экстремальные значения заданной неявно функции $z = z(x, y)$: $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$.

№486. Исследовать на локальные экстремумы функцию $z = f(x, y)$, заданную неявно уравнением $\frac{x^3}{3} + 2y^2 - xz^2 + z = 0$.

9.5 Ответы и решения

436. 1) Таких функций бесконечно много, их можно составлять из отрезков дуг окружности, однозначно проектируемых на ось абсцисс (сделайте рисунок).

2) Таких функций две: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$;

3) а) одна функция $y = \sqrt{1-x^2}$; б) две функции $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

437. 1) Таких функций бесконечно много: это может быть любая (разрывная) функция, составленная из участков графиков функций $y = \pm x$ (сделайте рисунок).

2) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$. Отсюда получаем 4 непрерывные функции, определённые на $\mathbb{R}$: $y = \pm x$, $y = \pm|x|$.

3) Из функций $y = \pm x$, $y = \pm|x|$ дифференцируемыми будут только две: $y = \pm x$.

4) а) $y(1) = 1$: две функции $y = x$, $y = |x|$;

б) $y(0) = 0$: все 4 функции $y = \pm x$, $y = \pm|x|$.

5) Поскольку непрерывные функции $y = x$ и $y = |x|$, проходящие через точку $(1, 1)$, тождественно равны в интервале $(1 - \delta, 1 + \delta)$, то для всех x из этого интервала только одна непрерывная функция $y = x$ удовлетворяет уравнению (1).

438. Продифференцируем уравнение 1 раз:

$$3x^2y + x^3 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} - y^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^3 - 3xy^2}.$$

439. С учётом $x > 0$, $y > 0$ перепишем уравнение $y^x = x^y$ в эквивалентном виде $x \ln y = y \ln x$. Продифференцируем по x : $\ln y + x \frac{y'}{y} = y' \ln x + \frac{y}{x}$, умножим на xy : $xy \ln y + x^2 y' = xy y' \ln x + y^2$ и выразим отсюда y' :

$$y' = \frac{y}{x} \cdot \frac{y - x \ln y}{x - y \ln x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{y - y \ln x}{x - x \ln y} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln y - 1}.$$

440. Обозначим $F(x, y) = e^{xy} - x - y$, тогда $F'_x = ye^{xy} - 1$, $F'_y = xe^{xy} - 1$ и по стандартной формуле находим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{ye^{xy} - 1}{xe^{xy} - 1}.$$

441. Обозначим $F(x, y) \equiv \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctg \frac{y}{x}$ и воспользуемся тем, что при $x \neq y$, $x \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{-y/x^2}{1+y^2/x^2}}{\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{1/x}{1+y^2/x^2}} = \frac{x+y}{x-y},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{x+y}{x-y} \right)'_x = \frac{(1+y')(x-y) - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \\ &= \frac{2(xy' - y)}{(x-y)^2} = \frac{2(x \cdot \frac{x+y}{x-y} - y)}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3}.\end{aligned}$$

442. 1) В данном случае $F(x, y) = xe^y + ye^x$, тогда $F'_x = e^y + ye^x$, $F'_y = xe^y + e^x$ и по стандартной формуле находим первую производную

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}.$$

Чтобы найти $y'(0)$, нам понадобятся значения $x = 0$ и соответствующее ему $y(0)$. Чтобы найти $y(0)$, достаточно подставить в исходное неявное уравнение $x = 0$: $0 \cdot e^y + ye^0 = 0$, откуда находим $y(0) = 0$. Подставляя теперь в полученное для производной выражение $x = 0$, $y(0) = 0$, находим

$$y'(0) = -\frac{e^0 + 0 \cdot e^0}{0 \cdot e^0 + e^0} = -1.$$

2) Найдём вторую производную, учитывая, что $y = y(x)$:

$$\begin{aligned}y''(x) &= \left(-\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x} \right)'_x = \\ &= -\frac{(e^y + ye^x)'_x \cdot (xe^y + e^x) - (e^y + ye^x) \cdot (xe^y + e^x)'_x}{(xe^y + e^x)^2} = \dots\end{aligned}$$

(вместо этого можно было последовательно два раза продифференцировать исходное уравнение). Подставляя затем в полученное выражение $x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, найдём $y''(0) = 4$.

443. Обозначим $F(x, y, z) \equiv x^2 + x \sin y + 2z + e^z$. Для решения задачи достаточно воспользоваться формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x + \sin y}{2 + e^z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x \cos y}{2 + e^z}.$$

444. Продифференцируем уравнение по переменной x :

$$((y+1)x^2z + yz^3)'_x = 0 \Rightarrow (y+1)(2xz + x^2z'_x) + y \cdot 3z^2 \cdot z'_x = 0.$$

Отсюда находим $z'_x = -\frac{2xz(y+1)}{x^2(y+1) + 3yz^2}$. Аналогично, продифференцируем уравнение по переменной y :

$$(x^2z(y+1) + yz^3)'_y = 0 \Rightarrow x^2(z'_y(y+1) + z) + z^3 + 3yz^2 \cdot z'_y = 0,$$

откуда $z'_y = -\frac{x^2 z + z^3}{x^2(y+1) + 3yz^2}$.

445. Обозначим $F(x, y, z) = \ln(x^2 \sin z + y \cos z)$ и вычислим частные производные

$$F'_x = \frac{2x \sin z}{y \cos z + x^2 \sin z}, \quad F'_y = \frac{\cos z}{y \cos z + x^2 \sin z}, \quad F'_z = \frac{x^2 \cos z - y \sin z}{y \cos z + x^2 \sin z}.$$

Требуемые производные находим по формулам

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x \sin z}{x^2 \cos z - y \sin z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\cos z}{x^2 \cos z - y \sin z}.$$

446. Обозначим аргументы этой сложной функции F через $t_1 = xyz$, $t_2 = x + y$. Имеем:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial F}{\partial t_2} dt_2 = 0, \quad (1)$$

где $dt_1 = \frac{\partial t_1}{\partial x} dx + \frac{\partial t_1}{\partial y} dy + \frac{\partial t_1}{\partial z} dz = yz dx + xz dy + xy dz$, $dt_2 = \frac{\partial t_2}{\partial x} dx + \frac{\partial t_2}{\partial y} dy = dx + dy$. Подставим в (1):

$$dF = F'_1(yz dx + xz dy + xy dz) + F'_2(dx + dy) = 0,$$

$$(F'_1 yz + F'_2) dx + (F'_1 xz + F'_2) dy + F'_1 xy dz = 0.$$

Отсюда находим

$$dz = -\frac{(F'_1 yz + F'_2) dx + (F'_1 xz + F'_2) dy}{F'_1 xy}.$$

Тогда коэффициенты при dx и dy будут частными производными 1-го порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_1 yz + F'_2}{F'_1 xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_1 xz + F'_2}{F'_1 xy}.$$

Задачу можно было решить проще: продифференцируем по x неявное уравнение $F = 0$ и получим $\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$, откуда $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz F'_1 + F'_2}{xy F'_1}$.

447. Обозначим аргументы сложной функции F через $t_1 = x + y + z$, $t_2 = y + z$, $t_3 = z$. Продифференцируем неявное уравнение по переменной y :

$$F'_1 \cdot \frac{dt_1}{dy} + F'_2 \cdot \frac{dt_2}{dy} + F'_3 \cdot \frac{dt_3}{dy} = 0,$$

$$F'_1 \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + F'_2 \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + F'_3 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot (F'_1 + F'_2 + F'_3) = -(F'_1 + F'_2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_1 + F'_2}{F'_1 + F'_2 + F'_3}.$$

448. Обозначим аргументы сложной функции F через $t_1 = xyz$, $t_2 = yz$, $t_3 = z$. Продифференцируем неявное уравнение по переменной y :

$$F'_1 \cdot \frac{dt_1}{dy} + F'_2 \cdot \frac{dt_2}{dy} + F'_3 \cdot \frac{dt_3}{dy} = 0,$$

$$F'_1 \cdot \left(x \left(z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right) + F'_2 \cdot \left(z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) + F'_3 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot (xyF'_1 + yF'_2 + F'_3) = -(xzF'_1 + zF'_2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xzF'_1 + zF'_2}{xyF'_1 + yF'_2 + F'_3}.$$

449. Продифференцируем уравнение последовательно по каждой из переменных x и y :

$$yz + xyz'_x + 2x + 4z^3 z'_x = 0, \quad xz + xyz'_y + 3y^2 + 4z^3 z'_y = 0.$$

Из полученных уравнений находим при $xy + 4z^3 \neq 0$

$$z'_x = -\frac{2x + yz}{xy + 4z^3}, \quad z'_y = -\frac{xz + 3y^2}{xy + 4z^3}.$$

450. По формуле первого дифференциала имеем

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Найдём частные производные:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-yz + 2x}{\cos z - xy}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-xz}{\cos z - xy}.$$

Тогда

$$dz = \left(\frac{yz - 2x}{\cos z - xy} dx + \frac{xz}{\cos z - xy} dy \right) \Big|_{M(-1,0,\pi)} = -2dx + \pi dy.$$

451. Возьмём дифференциал от обеих частей данного уравнения:

$$d(x^2 + y + zxy^2) = d(e^z) \Leftrightarrow 2xdx + dy + (xy^2 dz + zy^2 dx + 2zxy dy) = e^z dz.$$

Выражая отсюда dz , получим:

$$dz = \frac{2x + y^2 z}{e^z - xy^2} dx + \frac{1 + 2xyz}{e^z - xy^2} dy,$$

причём образовавшиеся коэффициенты при dx и dy являются, соответственно, частными производными 1-го порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + y^2 z}{e^z - xy^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 + 2xyz}{e^z - xy^2}.$$

Частные производные можно было вычислить непосредственно (без нахождения дифференциала). Для этого достаточно продифференцировать исходное уравнение последовательно по x , а затем по y , и из полученных таким образом равенств выразить производные:

$$2x + y^2(z + xz'_x) = e^z z'_x \Rightarrow z'_x = \frac{2x + y^2 z}{e^z - xy^2},$$

$$1 + x(y^2 z'_y + 2zy) = e^z z'_y \Rightarrow z'_y = \frac{1 + 2xyz}{e^z - xy^2}.$$

452. Поскольку $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, то необходимо найти z'_x , z'_y . В данном случае $F(x, y, z) \equiv e^z - x - y - z$, поэтому $F'_x = -1$, $F'_y = -1$, $F'_z = e^z - 1$ и по стандартным формулам получаем

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{1}{e^z - 1}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{1}{e^z - 1}.$$

Следовательно, $dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{dx + dy}{e^z - 1} = \frac{dx + dy}{x + y + z - 1}$.

Можно было поступить проще: взять один раз дифференциал от данного в условии равенства

$$d(x + y + z) = d(e^z) \Leftrightarrow dx + dy + dz = e^z dz,$$

откуда легко выразить $dz = \frac{dx + dy}{e^z - 1}$. Для нахождения 2-го дифференциала продифференцируем равенство ещё раз:

$$d(dx + dy + dz) = d(e^z dz) \Leftrightarrow d^2 z = d(e^z) dz + e^z d^2 z,$$

откуда находим $d^2 z = \frac{e^z dz^2}{1 - e^z} = -\frac{e^z}{(e^z - 1)^3} (dx + dy)^2$.

453. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2yz}{-\sin z + 2xy} = \frac{2yz}{\sin z - 2xy},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y \cdot \left(\frac{z}{\sin z - 2xy} \right)'_x = 2y \cdot \frac{z'_x (\sin z - 2xy) - z (\cos z \cdot z'_x - 2y)}{(\sin z - 2xy)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2y}{(\sin z - 2xy)^2} \cdot \left(2yz - \frac{2yz^2 \cos z}{\sin z - 2xy} + 2yz \right) = \\
&\dots = \frac{4y^2 z (2 \sin z - 4xy - z \cos z)}{(\sin z - 2xy)^3}, \quad \sin z \neq 2xy.
\end{aligned}$$

454. Чтобы найти частные производные 1-го порядка, продифференцируем уравнение, соответственно, по x и по y :

$$1 + z'_x = \frac{z'_x}{z} \Rightarrow z'_x = \frac{z}{1-z}, \quad 2 + z'_y = \frac{z'_y}{z} \Rightarrow z'_y = \frac{2z}{1-z}.$$

Используя их, теперь найдём производные 2-го порядка:

$$\begin{aligned}
z''_{xx} &= \left(\frac{z}{1-z} \right)'_x = \frac{z'_x(1-z) - z(-z'_x)}{(1-z)^2} = \dots = \frac{z}{(1-z)^3}, \\
z''_{xy} &= \left(\frac{z}{1-z} \right)'_y = \frac{z'_y(1-z) - z(-z'_y)}{(1-z)^2} = \dots = \frac{2z}{(1-z)^3}, \\
z''_{yy} &= \left(\frac{2z}{1-z} \right)'_y = 2 \frac{z'_y(1-z) - z(-z'_y)}{(1-z)^2} = \dots = \frac{4z}{(1-z)^3}.
\end{aligned}$$

Тогда для второго дифференциала получим выражение

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2 = \frac{z}{(1-z)^3}(dx^2 + 4dxdy + 4dy^2).$$

455. 1) Найдём частные производные 1-го порядка. Для этого можно продифференцировать по x (по y) данное в условии уравнение:

$$2x + 2zz'_x = 0 \Rightarrow z'_x = -\frac{x}{z}.$$

С другой стороны, можно было воспользоваться формулами ($F \equiv x^2 + y^2 + z^2 - a^2$)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}.$$

2) Найдём частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{z} \right) = -\frac{z - xz'_x}{z^2} = -\frac{z - x(-\frac{x}{z})}{z^2} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3},$$

аналогично

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(-\frac{x}{z} \right)'_y = -x \left(\frac{1}{z} \right)'_y = -x \left(-\frac{1}{z^2} z'_y \right) = x \left(\frac{1}{z^2} \left(-\frac{y}{z} \right) \right) = -\frac{xy}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}.$$

456. 1) Найдём частные производные 1-го порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

Тогда $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{yz}{z^2 - xy}dx + \frac{xz}{z^2 - xy}dy$.

2) Найдём частные производные 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{yz}{z^2 - xy} \right) = \frac{yz'_x(z^2 - xy) - yz(2zz'_x - y)}{(z^2 - xy)^2} = \\ &= \frac{y \cdot \frac{yz}{z^2 - xy}(z^2 - xy) - yz(2z \cdot \frac{yz}{z^2 - xy} - y)}{(z^2 - xy)^2} = -\frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3}. \end{aligned}$$

Аналогично, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2yx^3z}{(z^2 - xy)^3}$. Наконец,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{yz}{z^2 - xy} \right) = \frac{(z + yz'_y)(z^2 - xy) - yz(2zz'_y - x)}{(z^2 - xy)^2} = \\ &= \frac{(z + y \cdot \frac{xz}{z^2 - xy})(z^2 - xy) - yz(2z \cdot \frac{xz}{z^2 - xy} - x)}{(z^2 - xy)^2} = \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}, \end{aligned}$$

где $z^2 - xy \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \\ &= -\frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3}dx^2 + 2\frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}dxdy - \frac{2yx^3z}{(z^2 - xy)^3}dy^2. \end{aligned}$$

457. Обозначим $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Продифференцируем исходное равенство:

$$dF = d(0) \Leftrightarrow 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \Rightarrow dz = -\frac{xdx + ydy}{z}.$$

Чтобы найти второй дифференциал, продифференцируем ещё раз:

$$d^2z = d(dz) = d\left(-\frac{xdx + ydy}{z}\right) = -d\left(\frac{1}{z}(xdx + ydy)\right) =$$

$$= (xdx + ydy)d\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}d(xdx + ydy) =$$

(т. к. x и y – независимые переменные, то dx и dy можно рассматривать как постоянные величины и при взятии дифференциала выносить их из-под знака дифференциала)

$$\begin{aligned} &= -(xdx + ydy)\left(-\frac{1}{z^2}dz\right) - \frac{1}{z}(dx^2 + dy^2) = \\ &= -(xdx + ydy)\left(-\frac{1}{z^2}\left(-\frac{xdx + ydy}{z}\right)\right) - \frac{1}{z}(dx^2 + dy^2) = \\ &= -\frac{1}{z^3}(xdx + ydy)^2 - \frac{1}{z}(dx^2 + dy^2) = -\frac{x^2 + y^2}{z^3}dx^2 - 2 \cdot \frac{xy}{z^3}dxdy - \frac{y^2 + x^2}{z^3}dy^2. \end{aligned}$$

458. Продифференцируем по x и по y :

$$2x + 2zz'_x = \cos z \cdot z'_x \Rightarrow z'_x = \frac{2x}{\cos z - 2z}, \quad (1)$$

$$2y + 2zz'_y = \cos z \cdot z'_y \Rightarrow z'_y = \frac{2y}{\cos z - 2z}. \quad (2)$$

Продифференцируем (1) ещё раз по x :

$$\begin{aligned} 2 + 2(z'_x)^2 + 2zz''_{xx} &= -\sin z (z'_x)^2 + \cos z \cdot z''_{xx} \Rightarrow \\ z''_{xx} &= \frac{2 + (2 + \sin z)(z'_x)^2}{\cos z - 2z} = \dots = \frac{2(\cos z - 2z)^2 + 4x^2(2 + \sin z)}{(\cos z - 2z)^3}. \end{aligned}$$

Дифференцируя (2) ещё раз по y , аналогично находим

$$z''_{yy} = \frac{2(\cos z - 2z)^2 + 4y^2(2 + \sin z)}{(\cos z - 2z)^3}.$$

Наконец, продифференцируем (1) по y :

$$\begin{aligned} 2z'_x z'_y + 2z \cdot z''_{xy} &= -\sin z \cdot z'_x z'_y + \cos z \cdot z''_{xy} \Rightarrow \\ z''_{xy} &= \frac{(2 + \sin z)z'_x z'_y}{\cos z - 2z} = \frac{4xy(2 + \sin z)}{(\cos z - 2z)^3}. \end{aligned}$$

459. Запишем уравнение в виде

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad \text{где } \xi = xy, \eta = yz, \zeta = zx.$$

Дифференцируя $F(\xi, \eta, \zeta)$ по x как сложную функцию, получаем

$$F'_\xi \xi'_x + F'_\eta \eta'_x + F'_\zeta \zeta'_x = 0. \quad (1)$$

Здесь величины η и ζ также являются сложными функциями x и y . Учитывая это, имеем $\xi'_x = y$, $\eta'_x = yz'_x$, $\zeta'_x = z + xz'_x$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$F'_\xi y + F'_\eta yz'_x + F'_\zeta(z + xz'_x) = 0,$$

откуда находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_1 y + F'_3 z}{F'_2 y + F'_3 x},$$

где введены часто используемые обозначения $F'_1 = F'_\xi$, $F'_2 = F'_\eta$, $F'_3 = F'_\zeta$. Аналогично находится

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_1 x + F'_2 z}{F'_2 y + F'_3 x}.$$

460. По условию $z = z(x, y)$, с учётом этого продифференцируем (в смысле – возьмём дифференциал) неявное уравнение:

$$\frac{zdx - xdz}{z^2} = \frac{y}{x} \cdot \frac{ydz - zdy}{y^2},$$

$$\text{или } yzdx - x y dz - y z dz + z^2 dy = 0. \quad (1)$$

Отсюда выражаем первый дифференциал dz :

$$dz = \frac{z(ydx + zdy)}{y(x + z)}, \text{ где } x \neq -z. \quad (2)$$

Второй дифференциал d^2z можно найти двумя способами.

1-й способ. Дифференцируя равенство (1) ещё раз, получим

$$d(yz)dx - d(xy)dz - xy d^2z - d(yz)dz - yz d^2z + 2zdzdy = 0,$$

$$(zdy + ydz)dx - (xdy + ydx)dz - xy d^2z - (ydz + zdy)dz - yz d^2z + 2zdzdy = 0,$$

$$y(x + z)d^2z = zdx dy + (z - x)dy dz - ydz^2,$$

откуда выражаем d^2z :

$$d^2z = \frac{zdx dy + (z - x)dy dz - ydz^2}{y(x + z)}.$$

Для приведения полученного выражения к стандартному виду (представленному через dx^2 , $dx dy$ и dy^2) осталось подставить в это выражение dz из (2). В итоге получаем

$$d^2z = -\frac{z^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x + z)^3}, \text{ где } x \neq -z.$$

2-й способ. Дифференцируя повторно равенство (2), приходим к тому же результату.

461. Положим $t_1 = x + z$, $t_2 = y + z$. Продифференцируем исходное уравнение:

$$F'_1 dt_1 + F'_2 dt_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F'_1(dx + dz) + F'_2(dy + dz) = 0. \quad (1)$$

Отсюда $dz = -\frac{F'_1 dx + F'_2 dy}{F'_1 + F'_2}$, а также

$$dx + dz = dx - \frac{F'_1 dx + F'_2 dy}{F'_1 + F'_2} = \frac{F'_2(dx - dy)}{F'_1 + F'_2}, \quad (2)$$

$$dy + dz = dy - \frac{F'_1 dx + F'_2 dy}{F'_1 + F'_2} = -\frac{F'_1(dx - dy)}{F'_1 + F'_2}. \quad (3)$$

Продифференцируем первое равенство (1) ещё раз:

$$F''_{11} dt_1^2 + 2F''_{12} dt_1 dt_2 + F''_{22} dt_2^2 + F'_1 d^2 t_1 + F'_2 d^2 t_2 = 0,$$

где $d^2 t_1 = d(dx + dz) = d^2 z$, $d^2 t_2 = d(dy + dz) = d^2 z$. Тогда

$$F''_{11}(dx + dz)^2 + 2F''_{12}(dx + dz)(dy + dz) + F''_{22}(dy + dz)^2 + (F'_1 + F'_2)d^2 z = 0.$$

Из последнего равенства выражаем $d^2 z$, используя (2), (3):

$$d^2 z = -\frac{F_2'^2 F''_{11} - 2F'_1 F'_2 F''_{12} + F_1'^2 F''_{22}}{(F'_1 + F'_2)^3} (dx - dy)^2.$$

462. Положим $t_1 = x/z$, $t_2 = y/z$. Продифференцируем исходное уравнение:

$$F'_1 dt_1 + F'_2 dt_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F'_1 \cdot \frac{zdx - xdz}{z^2} + F'_2 \cdot \frac{zdy - ydz}{z^2} = 0. \quad (1)$$

Отсюда $dz = z \cdot \frac{F'_1 dx + F'_2 dy}{xF'_1 + yF'_2}$, а также

$$zdx - xdz = zF'_2 \cdot \frac{ydx - xdy}{xF'_1 + yF'_2}, \quad zdy - ydz = -zF'_1 \cdot \frac{ydx - xdy}{xF'_1 + yF'_2}. \quad (2)$$

Умножая второе равенство (1) на z^2 и ещё раз дифференцируя, получим

$$F''_{11} \frac{(zdx - xdz)^2}{z^2} + 2F''_{12} (zdx - xdz)(zdy - ydz) + F''_{22} \frac{(zdy - ydz)^2}{z^2} - (xF'_1 + yF'_2) d^2 z = 0.$$

Выражая отсюда d^2z и подставляя в полученное выражение dz через dx и dy , с учётом (2) окончательно получаем

$$d^2z = \frac{F_2'^2 F_{11}'' - 2F_1' F_2' F_{12}'' + F_1'^2 F_{22}''}{(xF_1' + yF_2')^3} (ydx - xdy)^2.$$

463. Найдём необходимую производную как коэффициент при dx^2 в стандартном выражении для второго дифференциала: $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$. Для этого вычислим 2-й дифференциал функции $z = z(x, y)$. Обозначим промежуточные переменные $t_1 = xz$, $t_2 = yz$ и продифференцируем последовательно уравнение два раза. Сначала один раз:

$$F_1' dt_1 + F_2' dt_2 = 0,$$

(т. е. $F_1'(zdx + xdz) + F_2'(zdy + ydz) = 0$, откуда находим $dz = -\frac{z(F_1'dx + F_2'dy)}{F_1'x + F_2'y}$), а затем второй раз:

$$(d(F_1')dt_1 + F_1'd^2t_1) + (d(F_2')dt_2 + F_2'd^2t_2) = 0,$$

$$(F_{11}''dt_1 + F_{12}''dt_2)dt_1 + F_1'd^2t_1 + (F_{21}''dt_1 + F_{22}''dt_2)dt_2 + F_2'd^2t_2 = 0,$$

где $dt_1 = zdx + xdz$, $dt_2 = zdy + ydz$, $d^2t_1 = d(dt_1) = d(zdx + xdz) = 2dx dz + x d^2z$, $d^2t_2 = d(dt_2) = d(zdy + ydz) = 2dy dz + y d^2z$. Подставляя в последнее равенство все дифференциалы, включая найденное ранее dz , выражаем из полученного равенства d^2z через dx и dy (т. е. приводя к стандартному виду). Ответ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(xF_1' + yF_2')^{-3} \cdot (y^2 z^2 (F_2'^2 F_{11}'' - 2F_1' F_2' F_{12}'' + F_1'^2 F_{22}'') - 2z(xF_1' + yF_2')F_1'').$$

464. 1) Найдём частные производные 1-го порядка. Для этого возьмём дифференциал от левой и правой частей уравнения:

$$d(z^3 + 3yz - 4x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3z^2 dz + 3(zdy + ydz) - 4dx = 0,$$

откуда находим $dz = \frac{4}{3z^2 + 3y} dx - \frac{z}{z^2 + y} dy$, следовательно, частные производные берём как коэффициенты при dx и dy :

$$z'_x = \frac{4}{3z^2 + 3y} \Big|_{(1,1)} = \frac{2}{3}, \quad z'_y = -\frac{z}{z^2 + y} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{2}.$$

2) Найдём частные производные 2-го порядка. Для этого вычислим 2-й дифференциал, взяв ещё раз дифференциал от левой и правой частей равенства $3z^2dz + 3(zdy + ydz) - 4dx = 0$ (при повторном дифференцировании дифференциалы независимых переменных dx и dy воспринимаем как константы):

$$d(3z^2dz + 3(zdy + ydz) - 4dx) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$d(3z^2)dz + 3z^2d^2z + 3(dzdy + zd^2y + dydz + yd^2z) - 4d^2x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

(поскольку в силу независимости переменных x и y имеем $d^2x = d^2y = 0$)

$$6zdz^2 + 3z^2d^2z + 3(2dydz + yd^2z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d^2z = -\frac{2zdz^2 + 2dydz}{z^2 + y}.$$

Далее надо подставить в полученное выражение для второго дифференциала найденное выше выражение для dz , упростить и привести к стандартному виду:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Тогда в качестве коэффициентов при dx^2 , $2dx dy$, dy^2 вы найдёте все необходимые частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и вычислите их значения в точке $(1, 1)$. После этого можно выписать формулу Тейлора.

Ответ: $z(x, y) = 1 + \frac{2}{3}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) - \frac{2}{9}(x - 1)^2 - \frac{1}{8}(y - 1)^2 + o(\rho^2)$, где $\rho = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$.

465. Продифференцируем систему по переменной z :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0, \\ 2x \cdot \frac{dx}{dz} + 2y \cdot \frac{dy}{dz} + 2z = 0. \end{cases}$$

Решая систему относительно $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, находим

$$\frac{dx}{dz} = \frac{y - z}{x - y}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{z - x}{x - y}.$$

466. Продифференцируем систему по переменной x , помня, что z и y зависят от x :

$$\begin{cases} 2x + 2y'_x + \frac{1}{z} \cdot z'_x = 0, \\ 2x + 2y \cdot y'_x + 2z \cdot z'_x = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно производных y'_x и z'_x , находим

$$y'_x = \frac{x(1-2z^2)}{2z^2-y}, \quad z'_x = \frac{2xz(y-1)}{2z^2-y}.$$

467. Продифференцируем каждое из уравнений системы по переменной z :

$$\begin{cases} 2x'y z + 2xy'z + 2xy - 2yy' - 2xx' = 0, \\ xy' + x'y + 2z + x'z + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (yz-x)x' + (xz-y)y' = -xy, \\ (y+z)x' + xy' = -x-2z. \end{cases}$$

Решим эту систему методом определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} yz-x & xz-y \\ y+z & x \end{vmatrix} = (yz-x)x - (xz-y)(y+z),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -xy & xz-y \\ -x-2z & x \end{vmatrix} = -x^2y + (x+2z)(xz-y),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} yz-x & -xy \\ y+z & -x-2z \end{vmatrix} = (x-yz)(x+2z) + xy(y+z).$$

Тогда по формулам Крамера находим искомые производные:

$$x' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2xz^2 - 2yz - x^2y + x^2z - xy}{-x^2 - xz^2 + y^2 + yz},$$

$$y' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{x^2 + 2xz - 2yz^2 + xy^2}{-x^2 - xz^2 + y^2 + yz}.$$

468. Ответ: $x' = \frac{z^2 - xz + y^2 - xy}{x^2 - xz + y^2 + yz}$, $y' = \frac{xy - x^2 + yz + z^2}{y^2 + yz + x^2 - xz}$. См. решение предыдущей задачи.

469. Продифференцируем каждое уравнение системы по x :

$$\begin{cases} -\sin x - \sin y \cdot y'_x - \sin z \cdot z'_x = 0, \\ 3x^2 + 3y^2 \cdot y'_x + 3z^2 \cdot z'_x = 0. \end{cases}$$

Умножая, например, первое из уравнений на y^2 , а второе – на $\sin y$, получаем уравнение, из которого находим

$$z'_x = \frac{x^2 \sin y - y^2 \sin x}{y^2 \sin z - z^2 \sin y}.$$

Подставляя затем z'_x в любое уравнение системы, находим вторую из производных:

$$z'_y = \frac{x^2 \sin z - z^2 \sin x}{z^2 \sin y - y^2 \sin z}.$$

470. Дифференцируя по x оба уравнения (по правилу дифференцирования сложных функций переменных x и y), получаем

$$\begin{cases} (u^2 + v^2) + x(2uu'_x + 2vv'_x) - u'_x y = 0, \\ v + xv'_x - y(2uu'_x + 2vv'_x) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (2ux - y)u'_x + 2v xv'_x = -(u^2 + v^2), \\ (-2uy)u'_x + (-2vy + x)v'_x = -v. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно u'_x и v'_x , находим

$$u'_x = \frac{2vy(u^2 + v^2) - x(u^2 - v^2)}{2ux^2 + 2vy^2 - xy}, \quad u'_y = \frac{v(y - 2ux) - 2uy(u^2 + v^2)}{2ux^2 + 2vy^2 - xy}.$$

471. Пользуясь свойством инвариантности формы первого дифференциала, имеем $dz = 2du + dv$. (1) Дифференцируя уравнения системы, получаем

$$\begin{cases} du + \frac{dv}{v} = dx, \\ -\frac{du}{u} + dv = dy, \end{cases}$$

откуда

$$du = \frac{uvdx - udy}{1 + uv}, \quad dv = \frac{vdx + uvdy}{1 + uv}.$$

Подставляя эти выражения в (1), находим

$$dz = \frac{v(1 + 2u)dx + u(v - 2)dy}{1 + uv}.$$

Из исходной системы при $x = 1, y = 1$ определяем $u = 1, v = 1$. Следовательно, $dz(1, 1) = \frac{3dx - dy}{2}$.

472. Возьмём дифференциалы последовательно два раза от каждого из уравнений:

$$e^{u+v} dx + xe^{u+v}(du + dv) + 2(udv + vdu) = 0,$$

$$e^{u-v} dy + ye^{u-v}(du - dv) - \frac{1}{1+v} du + \frac{udv}{(1+v)^2} = 2dx,$$

$$2e^{u+v} dx(du + dv) + xe^{u+v}(du + dv)^2 + xe^{u+v}(d^2u + d^2v) + 4dudv + 2udv^2 + 2vdu^2 = 0,$$

$$2dye^{u-v}(du-dv) + ye^{u-v}(du-dv)^2 + ye^{u-v}(d^2u-d^2v) - \\ - \frac{d^2u}{1+v} + \frac{2dudv}{(1+v)^2} + \frac{ud^2v}{(1+v)^2} - \frac{2udv^2}{(1+v)^3} = 0.$$

В точке (x_0, y_0, u_0, v_0) условия теоремы о неявных функциях выполнены, поэтому $du(1, 2)$, $dv(1, 2)$, $d^2u(1, 2)$, $d^2v(1, 2)$ удовлетворяют уравнениям

$$dx + du + dv = 0, \quad dy + 2(du - dv) - du = 2dx,$$

$$2dxdv + 2dxdv + (du + dv)^2 + (d^2u + d^2v) + 4dudv = 0,$$

$$2dydu - 2dydv + 2(du - dv)^2 + 2(d^2u - d^2v) - d^2u + 2dudv = 0,$$

откуда находим искомые дифференциалы

$$du(1, 2) = -\frac{dy}{3}, \quad d^2u(1, 2) = -\frac{8}{9}dxdy + \frac{14}{27}dy^2,$$

$$dv(1, 2) = -dx + \frac{dy}{3}, \quad d^2v(1, 2) = dx^2 - \frac{4}{9}dxdy - \frac{2}{27}dy^2.$$

473. Продифференцируем все три равенства сначала по x , а потом по y :

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial x} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{u}{\partial y}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Подставляя в системы $u = v = 1$, из первых двух уравнений первой системы находим $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{1+uv}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{uv}{1+uv}$, потом из третьего уравнения получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v(2u+1)}{1+uv} \Big|_{u=v=1} = \frac{3}{2}.$$

Аналогично из второй системы находим

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{uv}{1+uv}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{u}{1+uv} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u(v-2)}{1+uv} \Big|_{u=v=1} = -\frac{1}{2}.$$

474. Исходя из того, что $x = u(x, y) \cos v(x, y)$, $y = u(x, y) \sin v(x, y)$, $z = au(x, y) + bv(x, y)$, возьмём дифференциалы от этих тождеств:

$$\begin{cases} dx = \cos v du - u \sin v dv, \\ dy = \sin v du + u \cos v dv. \end{cases}$$

Из этой системы находим $du = \cos v dx + \sin v dy$, $dv = \frac{\cos v}{u} dy - \frac{\sin v}{u} dx$. Подставив выражения du и dv в dz , находим первый дифференциал

$$dz = a du + b dv = \left(a \cos v - \frac{b \sin v}{u} \right) dx + \left(a \sin v + \frac{b \cos v}{u} \right) dy.$$

Найдём второй дифференциал:

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = \left(-a \sin v dv - \frac{b \cos v}{u} dv + \frac{b \sin v}{u^2} du \right) dx + \\ &\quad + \left(a \cos v dv - \frac{b \sin v}{u} dv - \frac{b \cos v}{u^2} du \right) dy = \\ &= \left(\left(-a \sin v - \frac{b \cos v}{u} \right) \left(\frac{\cos v}{u} dy - \frac{\sin v}{u} dx \right) + \frac{b \sin v}{u^2} (\cos v dx + \sin v dy) \right) dx + \\ &\quad + \left(\left(a \cos v - \frac{b \sin v}{u} \right) \left(\frac{\cos v}{u} dy - \frac{\sin v}{u} dx \right) - \frac{b \cos v}{u^2} (\cos v dx + \sin v dy) \right) dy = \\ &= \left(\frac{a}{u} \sin^2 v + \frac{b}{u^2} \sin 2v \right) dx^2 + \left(\frac{a}{u} \cos^2 v - \frac{b}{u^2} \sin 2v \right) dy^2 - \\ &\quad - \left(\frac{a}{u} \sin 2v + \frac{2b}{u^2} \cos 2v \right) dx dy. \end{aligned}$$

475. Продифференцируем оба равенства по z :

$$\begin{cases} 2x \cdot \frac{dx}{dz} + 2y \cdot \frac{dy}{dz} = z, \\ \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Полагая в системе $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, получаем систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} - \frac{dy}{dz} = 1, \\ \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = -1, \end{cases}$$

из которой находим $\frac{dx}{dz} = 0$, $\frac{dy}{dz} = -1$. Для нахождения вторых производных продифференцируем систему (1) ещё раз по z :

$$\begin{cases} 2x \cdot \frac{d^2 x}{dz^2} + 2 \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + 2y \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} + 2 \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 = 1, \\ \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{d^2 y}{dz^2} = 0. \end{cases}$$

Полагая теперь $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, $\frac{dx}{dz} = 0$, $\frac{dy}{dz} = -1$, получаем систему

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{d^2x}{dz^2} - 2 \cdot \frac{d^2y}{dz^2} = -1, \\ \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{d^2y}{dz^2} = 0, \end{cases} \quad \text{решая которую, находим } \frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{1}{4}, \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{4}.$$

476. Система определяет две параметрически заданные функции

$$\begin{cases} x = t + \frac{1}{t}, \\ y = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = t + \frac{1}{t}, \\ z = t^3 + \frac{1}{t^3}. \end{cases}$$

Следовательно, при $t \neq \pm 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t - \frac{2}{t^3}}{1 - \frac{1}{t^2}} = 2 \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)}{1 - \frac{1}{t^2}} = 2,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - \frac{3}{t^4}}{1 - \frac{1}{t^2}} = 3 \left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1 \right),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6 \left(t - \frac{1}{t^3} \right)}{1 - \frac{1}{t^2}} = 6 \left(t + \frac{1}{t} \right).$$

477. Продифференцируем систему один раз:

$$\begin{cases} dF(x, y, z) = 0, \\ dG(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_1 dx + F'_2 dy + F'_3 dz = 0, \\ G'_1 dx + G'_2 dy + G'_3 dz = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим dy и dz через dx :

$$dy = \frac{F'_3 G'_1 - F'_1 G'_3}{F'_2 G'_3 - F'_3 G'_2} dx, \quad dz = \frac{F'_2 G'_1 - F'_1 G'_2}{F'_3 G'_2 - F'_2 G'_3} dx.$$

478. Продифференцируем систему один раз:

$$\begin{cases} dF(x, y) = du, \\ dG(x, y) = dv, \end{cases}$$

перепишем эту систему ещё раз, раскрыв левые части уравнений

$$\begin{cases} F'_1 dx + F'_2 dy = du, \\ G'_1 dx + G'_2 dy = dv. \end{cases}$$

Решая систему относительно dx и dy , окончательно находим

$$\begin{aligned} dx &= \frac{G'_2}{F'_1 G'_2 - F'_2 G'_1} du - \frac{F'_2}{F'_1 G'_2 - F'_2 G'_1} dv, \\ dy &= \frac{G'_1}{F'_2 G'_1 - F'_1 G'_2} du - \frac{F'_1}{F'_2 G'_1 - F'_1 G'_2} dv. \end{aligned}$$

479. Продифференцируем систему один раз:

$$\begin{cases} dF(x, y, u, v) = 0, \\ dG(x, y, u, v) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_1 dx + F'_2 dy + F'_3 du + F'_4 dv = 0, \\ G'_1 dx + G'_2 dy + G'_3 du + G'_4 dv = 0. \end{cases}$$

Исключая dv , отсюда находим

$$du = \frac{F'_1 G'_4 - F'_4 G'_1}{F'_4 G'_3 - F'_3 G'_4} dx + \frac{F'_2 G'_4 - F'_4 G'_2}{F'_4 G'_3 - F'_3 G'_4} dy.$$

480. Уравнения $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$ задают y и z как функции от x . Дифференцируя по x , получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений относительно $\frac{dy}{dx}$ (по формулам Крамера), получаем

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z}}.$$

481. 1) Возьмём дифференциалы от правой и левой частей каждого из уравнений системы:

$$\begin{cases} d(uv) = d(3x - 2y + z), \\ d(v^2) = d(x^2 + y^2 + z^2), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} vd(u) + u dv = 3dx - 2dy + dz, \\ v dv = x dx + y dy + z dz. \end{cases}$$

Получили систему уравнений относительно переменных dx, dy, dz . Из второго уравнения системы выражаем $dv = \frac{x}{v} dx + \frac{y}{v} dy + \frac{z}{v} dz$. Учитывая формулу полного дифференциала $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$, находим частные производные

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{v}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{z}{v}.$$

Подставив в первое уравнение системы дифференциал dv , получим

$$vdu = \left(3 - \frac{ux}{v}\right) dx - \left(2 + \frac{uy}{v}\right) dy + \left(1 - \frac{uz}{v}\right) dz.$$

Учитывая формулу полного дифференциала $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$, находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3v - ux}{v^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2v + uy}{v^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v - uz}{v^2}.$$

2) Для проверки тождества подставим найденные частные производные в левую часть доказываемого тождества:

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{x(3v - ux) - y(2v + uy) + z(v - uz)}{v^2} = \\ &= \frac{v(3x - 2y + z) - u(x^2 + y^2 + z^2)}{v^2}. \end{aligned}$$

Учитывая первоначальные уравнения, получаем требуемое тождество.

482. 1) Обозначим $F = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10$. С учётом необходимого условия экстремума, найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} F'_x = 2x - 2 = 0, \\ F'_y = 2y + 2 = 0, \\ F \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0, \end{cases}$$

откуда находим точки $M_1(1, -1, -2)$, $M_2(1, -1, 6)$.

2) Для проверки достаточных условий экстремальности оценим знак второго дифференциала в каждой из найденных точек. Найдём d^2z .

1-й способ (нахождение d^2z непосредственным дифференцированием). Вначале найдём dz , продифференцировав третье уравнение системы выше:

$$F \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$dF = d(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2xdx + 2ydy + 2zdz - 2dx + 2dy - 4dz = 0 \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{(x-1)dx + (y+1)dy}{2-z}.$$

Дифференцируя ещё раз, найдём d^2z :

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{(x-1)dx + (y+1)dy}{2-z}\right) =$$

$$= \frac{d((x-1)dx + (y+1)dy)(2-z) - ((x-1)dx + (y+1)dy)d(2-z)}{(2-z)^2}.$$

Так как нас интересует выражение для d^2z не в произвольной точке, а лишь в стационарных, где $dz = 0$, то для таких точек второе слагаемое в числителе дроби обнуляется, и получаем, что в любой стационарной точке второй дифференциал имеет более простой вид

$$d^2z = \frac{dx^2 + dy^2}{2-z}.$$

Тогда $d^2z(M_1) = \frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) > 0$, $d^2z(M_2) = -\frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) < 0$. Следовательно, в точке M_1 имеется локальный минимум, равный $z_{\min} = -2$, а в точке M_2 – локальный максимум, равный $z_{\max} = 6$.

2-й способ (нахождение d^2z по формуле (2')). В стационарных точках имеем:

$$\begin{aligned} d^2z &= -\frac{1}{F'_z} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{2z-4} (2dx^2 + 2 \cdot 0 \cdot dx dy + 2dy^2) = \frac{dx^2 + dy^2}{2-z} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

3-й способ (геометрический подход). Выделяя в исходном неявном уравнении полные квадраты, приведём его к виду

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4^2.$$

Эта поверхность – сфера с центром в $(1, -1, 2)$ и радиусом 4. Тогда результат становится очевидным.

483. Обозначим $F(x, y, z) \equiv 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72$. Для нахождения стационарных точек решим систему

$$\begin{cases} F'_x = 10x - 2y - 2z = 0, \\ F'_y = 10y - 2x - 2z = 0, \\ F \equiv 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_1(1, 1, 4), \\ M_2(-1, -1, -4). \end{cases}$$

Проверим достаточные условия с помощью 2-го дифференциала по формуле (2'). Имеем $F''_{xx} = 10$, $F''_{yy} = 10$, $F''_{xy} = -2$; $F'_z = 10z - 2x - 2y$, следовательно

$$\begin{aligned} d^2z &= -\frac{1}{F'_z} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{10z - 2x - 2y} (10dx^2 - 4dx dy + 10dy^2) = \frac{1}{-5z + x + y} (4dx^2 + 4dy^2 + (dx - dy)^2). \end{aligned}$$

Тогда $d^2z(M_1) = -\frac{1}{18}(4dx^2 + 4dy^2 + (dx - dy)^2) < 0$, следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный максимум, равный 4. Далее, $d^2z(M_2) = \frac{1}{18}(4dx^2 + 4dy^2 + (dx - dy)^2) > 0$, а значит, в точке M_2 функция имеет локальный минимум, равный (-4) .

484. Обозначим $F(x, y, z) \equiv 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z + 5$. Для нахождения стационарных точек решим систему

$$\begin{cases} F'_x = 12x + 4 = 0, \\ F'_y = 12y - 8 = 0, \\ F \equiv 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z + 5 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_1 \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4-\sqrt{6}}{6} \right), \\ M_2 \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4+\sqrt{6}}{6} \right). \end{cases}$$

Для проверки достаточных условий найдём второй дифференциал по формуле (1'). Имеем $F''_{xx} = 12$, $F''_{yy} = 12$, $F''_{xy} = 0$, $F'_z = 12z - 8$, следовательно

$$\begin{aligned} d^2z &= -\frac{1}{F'_z} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{12z - 8} (12dx^2 + 12dy^2) = \frac{3(dx^2 + dy^2)}{2 - 3z}. \end{aligned}$$

Тогда $d^2z(M_1) > 0$, $d^2z(M_2) < 0$ и, следовательно, в точке M_1 функция имеет строгий локальный минимум, равный $\frac{4-\sqrt{6}}{6}$, а точке M_2 , соответственно, строгий локальный максимум, равный $\frac{4+\sqrt{6}}{6}$.

485. Обозначим $F \equiv x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2$. Для нахождения стационарных точек решим систему

$$\begin{cases} F'_x = 2x - z + 2 = 0, \\ F'_y = 2y - z + 2 = 0, \\ F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_1(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6}, -4 + 2\sqrt{6}), \\ M_2(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6}, -4 - 2\sqrt{6}). \end{cases}$$

Для проверки достаточных условий найдём второй дифференциал. Возможны два способа.

1-й способ (последовательное дифференцирование). Продифференцируем неявное уравнение один раз:

$$dF(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow (2x - z + 2)dx + (2y - z + 2)dy + (2z - x - y + 2)dz = 0.$$

Ещё раз продифференцируем полученное уравнение:

$$(2dx - dz)dx + (2dy - dz)dy + (2dz - dx - dy)dz + (2z - x - y + 2)d^2z = 0.$$

Учтём, что в стационарных точках $dz = 0$:

$$2dx^2 + 2dy^2 + (2z - x - y + 2)d^2z = 0,$$

откуда находим $d^2z = \frac{2(dx^2 + dy^2)}{-2z + x + y - 2}$.

2-й способ (по формуле (2')). Имеем $F''_{xx} = 2$, $F''_{yy} = 2$, $F''_{xy} = 0$; $F'_z = 2z - x - y + 2$, следовательно

$$d^2z = -\frac{1}{F'_z} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 \right) = -\frac{1}{2z - x - y + 2} (2dx^2 + 2dy^2).$$

Тогда $d^2z(M_1) = -\frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dy^2) < 0$, $d^2z(M_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dy^2) > 0$. Значит, в точке M_1 функция имеет максимум, равный $z_{\max} = z(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6}) = -4 + 2\sqrt{6}$, а в точке M_2 , соответственно, минимум $z_{\min} = z(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6}) = -4 - 2\sqrt{6}$.

486. Обозначим $F(x, y, z) \equiv \frac{x^3}{3} + 2y^2 - xz^2 + z$. Для нахождения стационарных точек составим и решим систему

$$\begin{cases} F'_x = x^2 - z^2 = 0, \\ F'_y = 4y = 0, \\ F \equiv \frac{x^3}{3} + 2y^2 - xz^2 + z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_1(0, 0, 0), \\ M_2(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}), \\ M_3(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, -\sqrt{\frac{3}{2}}). \end{cases}$$

Проверим достаточные условия с помощью 2-го дифференциала по формуле (1'). Имеем $F''_{xx} = 2x$, $F''_{yy} = 4$, $F''_{xy} = 0$; $F'_z = -2xz + 1$, следовательно

$$\begin{aligned} d^2z &= -\frac{1}{F'_z} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{-2xz + 1} \cdot (2x dx^2 + 4dy^2) = \frac{1}{2xz - 1} \cdot (2x dx^2 + 4dy^2). \end{aligned}$$

Тогда $d^2z(M_1) = -4dy^2 < 0$, значит, в точке M_1 функция имеет максимум, равный 0. Так как $d^2z(M_2) = \frac{1}{2} \left(2\sqrt{\frac{3}{2}} dx^2 + 4dy^2 \right) > 0$, то в точке M_2 функция имеет минимум, равный $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Наконец, $d^2z(M_3) = \frac{1}{2} \left(-2\sqrt{\frac{3}{2}} dx^2 + 4dy^2 \right)$. При $dx = 0$, $dy \neq 0$ имеем $d^2z(M_3) = \frac{1}{2} \cdot 4dy^2 > 0$, а при $dx \neq 0$, $dy = 0$ имеем $d^2z(M_3) = \frac{1}{2} \left(-2\sqrt{\frac{3}{2}} dx^2 \right) < 0$, т. е. в этой точке нет экстремума.

10 СЕМИНАР: Условный экстремум. Метод неопределённых множителей Лагранжа

«Предмет математики настолько серьёзен, что полезно не упустить случая сделать его немного занимательным».

Б. Паскаль (1623-1662), французский математик, механик, физик, литератор и философ.

С целью защиты авторских прав

НЕ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ!

Выше мы рассматривали понятие локального экстремума функции нескольких переменных, где аргументы функции не были связаны никакими дополнительными условиями. При этом в математике часто встречается более общая задача об отыскании экстремумов функции, аргументы которой удовлетворяют *дополнительным условиям* (которые мы будем называть уравнениями связи). Экстремумы такого рода назовём *условными*, чтобы отличать их от безусловных экстремумов, изученных ранее.

10.1 Понятие условного экстремума

Точка $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$ называется точкой *условного минимума* (максимума) функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ при условии, что переменные $x_1, \dots, x_m$ связаны между собой n дополнительными уравнениями (*связи*), где $n < m$:

[illegible]

если существует окрестность точки M_0 , в которой функция f определена и в которой неравенство $f(M) \geq f(M_0)$ (соответственно, $f(M) \leq f(M_0)$) выполняется для всех точек M , координаты которых удовлетворяют уравнениям связи (1). Иными словами, экстремальные точки ищутся не на всей области определения функции, а только на том подмножестве, которое описывается уравнениями связи.

Для нахождения точек условного экстремума был разработан метод множителей Лагранжа.

10.2 Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим оригинальный подход, предложенный в своё время Жозефом Луи Лагранжем и позволяющий свести задачу нахождения условного экстремума при наличии системы ограничений (1) к более простой задаче поиска безусловного экстремума у некоторой функции специального вида (функции Лагранжа, или лагранжиана).¹

Введём в рассмотрение вспомогательную *функцию Лагранжа*:

$$L(x_1, \dots, x_m; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_n F_n,$$

где функция f в данном контексте называется *целевой функцией*, а коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — неопределёнными *множителями Лагранжа*.² Далее эту функцию исследуют на обычный (безусловный) экстремум, рассматривая её при всех $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим алгоритм исследования.

1) С учётом *необходимого условия экстремума* отбираются точки возможного экстремума — стационарные точки. Для этого решается система $m + n$ уравнений с $m + n$ неизвестными:

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ L'_{x_m} = 0, \\ F_1 = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ F_n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

При этом для каждой стационарной точки $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$ определяется соответствующий ей набор множителей Лагранжа $(\lambda_1^\circ, \dots, \lambda_n^\circ)$.

2) Проверка *достаточных условий* экстремальности.

Среди найденных стационарных точек далее необходимо отобрать те, в которых действительно имеются экстремумы. Для этого понадобится использование различного рода *достаточных условий* экстремума.

Например, при двукратной дифференцируемости функций f и F_i ($i = \overline{1, n}$) в окрестности стационарной точки M_0 и непрерывности их частных производных второго порядка в самой точке M_0 , можно оценить знак второго дифференциала d^2L в каждой из отобранных точек. Если при этом окажется, что в

¹Это возможно благодаря тому, что при наличии связей точки локальных экстремумов функции $f(M)$ и функции Лагранжа $L = f(M) + \lambda_1 F_1(M) + \dots + \lambda_n F_n(M)$ совпадают. В самом деле, если рассматривать множители Лагранжа такими же переменными, как и $x_1, \dots, x_m$, то приравнивание частных производных по ним к нулю порождает ту же систему уравнений (2), что получается в методе множителей Лагранжа (см. ниже).

²В теории оптимального управления их называют *двойственными переменными*.

3) Наконец, для вычисления самих экстремальных значений надо подставить координаты $(x_1^o, \dots, x_m^o)$ каждой из экстремальных точек в функцию f и найти искомые экстремумы.

$$\begin{cases} dF_1(x_1, \dots, x_m) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ dF_n(x_1, \dots, x_m) = 0, \end{cases}$$

Замечание 2. В некоторых случаях при нахождении экстремумов возможны упрощающие решение приёмы. Приведём один из таких приёмов. Пусть исследуемая на условный экстремум функция $u = u(M)$ имеет вид произведения нескольких положительных сомножителей, например

$$u = f(M) \cdot q(M) \cdot h(M).$$

$$\ln u = \ln f + \ln q + \ln h$$

Геометрический смысл метода Лагранжа рассмотрим на примере функции трёх переменных $u = f(x, y, z)$, у которой ищется условный экстремум при наличии двух уравнений связи $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$. Функция Лагранжа, или лагранжиан, имеет при этом вид

$$L(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 F_1(x, y, z) + \lambda_2 F_2(x, y, z).$$

$$\text{grad } L(M_0) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$-\text{grad } f(M_0) = \lambda_1 \cdot \text{grad } F_1(M_0) + \lambda_2 \cdot \text{grad } F_2(M_0).$$

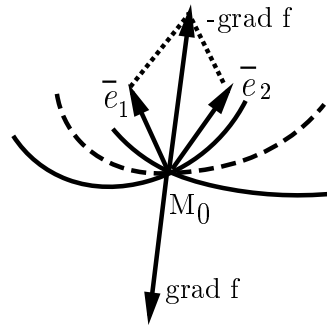


Рис. 4

Через стационарную точку M_0 проходит некоторая поверхность уровня функции f , отображаемая на Рис. 4 пунктирной линией. В этой точке функция f имеет ненулевой вектор-градиент $\text{grad } f$, перпендикулярный данной поверхности уровня (на рисунке направлен вниз). В этой же точке пересекаются две поверхности, определяемые уравнениями связи (ограничения) с градиентами $\text{grad } F_1$ и $\text{grad } F_2$. Получается, что в экстремальной точке градиент функции должен уравниваться линейной комбинацией градиентов ограничений, т. е. антиградиент $-\text{grad } f$ раскладывается в сумму векторов $\vec{e}_1 = \lambda_1 \cdot \text{grad } F_1$ и $\vec{e}_2 = \lambda_2 \cdot \text{grad } F_2$, где коэффициенты λ_1 и λ_2 как раз и есть множители Лагранжа.¹

Существует метод Лагранжа и для более общего случая, когда ограничения задаются системой неравенств.

Рассмотрим примеры на нахождение условного экстремума.

Пример 142. Исследовать на экстремумы функцию

$$u(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2, \quad \text{если } 2x - y - 3 = 0.$$

Решим задачу методом множителей Лагранжа. Введём функцию Лагранжа

$$L = x^2 - y^2 + z^2 + \lambda(2x - y - 3), \quad \text{где } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}.$$

1) *Необходимое условие экстремума.* Найдём стационарные точки (точки воз-

¹Чем больше «вклад» (влияние) какого-либо из ограничений, тем больше по абсолютной величине соответствующий ему множитель Лагранжа. Если какой-либо из множителей Лагранжа оказался равен нулю, то соответствующее ограничение (уравнение связи) не выполняется, т. е., как иногда говорят, данное ограничение неактивно.

можного экстремума) и соответствующие им множители Лагранжа из системы

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda = 0, \\ L'_y = -2y - \lambda = 0, \\ L'_z = 2z = 0, \\ L'_\lambda = 2x - y - 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \\ z = 0, \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

Как видно, такая точка $M_0(2, 1, 0)$ всего одна и ей отвечает множитель $\lambda = -2$.

2) Проверим в этой точке выполнение достаточного условия экстремума. Найдём для этого второй дифференциал (сначала в произвольной точке (x, y, z)):

$$\begin{aligned} d^2L(M) &= L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + 2L''_{xz}dxdz + 2L''_{yz}dydz = \\ &= 2dx^2 - 2dy^2 + 2dz^2. \end{aligned}$$

В данном случае такой же вид имеет второй дифференциал и в точке M_0 . Так как знак дифференциала пока затруднительно определить, то для получения дополнительной информации продифференцируем уравнение связи

$$d(2x - y - 3) = 0 \Rightarrow dy = 2dx$$

и подставим полученное соотношение между дифференциалами в выражение для второго дифференциала:

$$d^2L(M_0) = 2(dx^2 - dy^2 + dz^2) = 2(dx^2 - (2dx)^2 + dz^2) = -6dx^2 + 2dz^2.$$

При $dx = 0, dz \neq 0$ имеем $d^2L(M_0) > 0$, а при $dx \neq 0, dz = 0$ имеем $d^2L(M_0) < 0$. Следовательно, экстремума в найденной точке нет. $\square$

Пример 143. Исследовать на условный экстремум методом неопределённых множителей Лагранжа функцию

$$f(x, y) = x + 3y, \quad \text{если } x^2 + y^2 = 10.$$

Решение. Геометрическая интерпретация данной задачи такова: требуется найти наибольшее и наименьшее значение аппликаты плоскости $z = x + 3y$ среди точек её пересечения с цилиндром $x^2 + y^2 = 10$. Обозначим $F(x, y) = x^2 + y^2 - 10$. Согласно методу Лагранжа, задача нахождения условных экстремумов у функции f сводится к задаче определения безусловных экстремумов у её функции Лагранжа:

$$L(x, y) = x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 10), \quad \text{где } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Найдём точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 10, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda}, \\ y = -\frac{3}{2\lambda}, \\ \lambda^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Имеем две стационарные точки: $M_1(1, 3)$ и отвечающий ей множитель Лагранжа $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, а также $M_2(-1, -3)$ и $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

2) Проверим точки на экстремальность. Для этого вычислим 2-й дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2L(x, y) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

Оценивая при $|dx| + |dy| \neq 0$ его знак в точках $M_{1,2}$, получаем:

$$d^2L(M_1) = 2\lambda_1(dx^2 + dy^2) = -dx^2 - dy^2 < 0, \quad d^2L(M_2) = 2\lambda_2(dx^2 + dy^2) = dx^2 + dy^2 > 0.$$

Значит, M_1 – точка условного локального максимума, равного $f(1, 3) = 10$, а M_2 – точка условного минимума, $f(-1, -3) = -10$. $\square$

Пример 144. Найти экстремумы функции

$$u = 2x + y^2 - 2z^2$$

на множестве, заданном уравнениями

$$2x + y - 5z = 6, \quad -x + 3y - z = 3.$$

Решение. 1) Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, z) = 2x + y^2 - 2z^2 + \lambda_1(2x + y - 5z - 6) + \lambda_2(-x + 3y - z - 3)$$

и выпишем необходимое условие экстремума в виде системы

$$\begin{cases} L'_x = 2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0; \\ L'_y = 2y + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0; \\ L'_z = -4z - 5\lambda_1 - \lambda_2 = 0; \\ 2x + y - 5z - 6 = 0; \\ -x + 3y - z - 3 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдём единственную стационарную точку

$$M_0\left(\frac{67}{7}, \frac{38}{7}, \frac{26}{7}\right).$$

2) Вычислим второй дифференциал:

$$\begin{aligned} d^2L(x, y, z) &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} dz^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} dy dz = 2dy^2 - 4dz^2. \end{aligned}$$

Воспользуемся далее уравнениями связи. Исключая x из двух последних уравнений системы, находим $y = z + \frac{12}{7} \Rightarrow dy = dz$. Подставим во второй дифференциал:

$$d^2L(x, y, z) = 2dz^2 - 4dz^2 = -2dz^2 < 0.$$

Итак, $d^2L(M_0) < 0$ и, значит, M_0 – точка условного максимума, который равен $\frac{1030}{49}$.
□

Замечание 3. При проверки достаточных условий экстремальности в задачах на условный экстремум обычно оценивают в стационарной точке знак второго дифференциала. Возникает вопрос: можно ли использовать для этих целей критерий Сильвестра? Вообще говоря, нет. Рассмотрим следующий пример.

Пример 145. Найти при условии $x + y = 0$ экстремум функции

$$z(x, y) = 3y^3 + 4x^2 - xy.$$

Решение. Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y) = y^3 + 4x^2 - xy + \lambda(x + y).$$

1) Учтём необходимое условие экстремума. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = 8x - y + \lambda = 0, \\ L'_y = 9y^2 - x + \lambda = 0, \\ x + y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ \lambda = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{10}{9}, \\ y = -\frac{10}{9}, \\ \lambda = -10. \end{cases}$$

Таким образом, имеем две точки возможного экстремума: $M_1(0, 0)$. $M_2\left(\frac{10}{9}, -\frac{10}{9}\right)$.

2) Проверим достаточные условия экстремума.

1-й способ. Выясним характер экстремума в каждой точке, оценивая знак второго дифференциала:

$$d^2L(x, y) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 = 8dx^2 - 2dxdy + 18ydy^2.$$

Из уравнения связи имеем: $dx + dy = 0$, или $dy = -dx$. С учётом этого получим

$$d^2L(x, y) = (10 + 18y)dx^2.$$

Так как $d^2L|_{(0,0)} = 10dx^2 > 0$, то M_1 является точкой условного локального минимума, причём $z_{\min} = 0$. Аналогично, $d^2L|_{\left(\frac{10}{9}, -\frac{10}{9}\right)} = -10dx^2 < 0$, т. е. M_2 является точкой условного максимума $z_{\max} = \frac{500}{243}$.

2-й способ. Попробуем формально воспользоваться критерием Сильвестра, чтобы установить, есть в найдённых точках экстремум или нет. Выпишем матрицу Гессе вторых производных:

$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 18y \end{vmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра, в точках M_1 и M_2 имеем: $D_2 < 0$, т. е. обе точки не являются экстремальными. Это противоречит результатам, полученным в 1-м способе решения. В чём дело? Попробуем разобраться.

Обратите внимание, что уравнения связи в этой задаче линейные по каждой из переменных x и y , поэтому при их двукратном дифференцировании их вторые производные обнуляются и в результате матрица Гессе не содержит (!) информации об уравнениях связи. По сути, решается задача на безусловный экстремум. И полученные результаты этому соответствуют (действительно, в точках M_1 и M_2 никакого безусловного экстремума нет).

Поэтому надо либо использовать 1-й способ (оценивать знак второго дифференциала с использованием, в случае необходимости, продифференцированных уравнений связи), либо применять следующую расширенную модификацию критерия Сильвестра для задач условного экстремума, в которой матрица Гессе окаймляется строкой и столбцом из первых производных. $\square$

Теорема 1 (*критерий Сильвестра для задач на нахождение условного экстремума, для функций 2-х переменных*). Пусть ищутся экстремумы функции двух переменных $f(x, y)$ при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$. Пусть функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в окрестности стационарной точке M_0 , L – функция Лагранжа. Рассмотрим определитель

$$A = \begin{vmatrix} 0 & F'_x & F'_y \\ F'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ F'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Тогда если в точке M_0 имеем $A < 0$, то в этой точке функция имеет условный локальный минимум, а если $A > 0$, то условный локальный максимум.

Решим последнюю из задач с помощью этой теоремы. Выпишем определитель для данной задачи:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 8y \end{vmatrix} = -10 - 8y.$$

Тогда в точке M_1 имеем $A < 0$, т. е. в этой точке функция имеет минимум, причём $z_{\min} = 0$. В точке M_2 имеем $A > 0$, следовательно, в этой точке имеется условный максимум, причём $z_{\max} = \frac{500}{243}$. $\square$

10.3 Нахождение точных граней функций на замкнутых ограниченных множествах

Вспомним, как в средней школе мы искали наибольшее (наименьшее) значение функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемой внутри него. Для обоснования того, что эти наибольшее и наименьшее значения достигаются, можно использовать вторую теорему Вейерштрасса. Для их нахождения мы с помощью производной, приравнявая её к нулю, определяли точки локальных экстремумов, отбирали те из них (обозначим их $x_1, \dots, x_k$), которые попадали на интервал (a, b) , вычисляли значения функции $f(a)$, $f(b)$ в граничных точках отрезка, и уже затем определяли $f_{\max} = \max\{f(x_1), \dots, f(x_k), f(a), f(b)\}$ и $f_{\min} = \min\{f(x_1), \dots, f(x_k), f(a), f(b)\}$. Общий подход сохраняется и в случае функций многих переменных. Рассмотрим его на примере.

Пример 146. [5, Пример № 8.54] Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$u = x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z$$

в полушаре $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$.

Решение. Поскольку функция $u(x, y, z)$ непрерывна в полушаре, который представляет собой в $\mathbb{R}^3$ замкнутое ограниченное множество (компакт), то, во-первых, по теореме Вейерштрасса точные грани функции достигаются, т. е. существуют такие точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $\tilde{M}_0(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$, что $u(M_0) = \max_{M \in D} u(M)$, $u(\tilde{M}_0) = \min_{M \in D} u(M)$.

1) Критические точки, лежащие внутри полушара, можно найти, решив обычную задачу на безусловный экстремум и отобрав точки, попадающие внутрь полушара. Для этого решим систему

$$\begin{cases} u'_x = 2x - 2 = 0; \\ u'_y = 2y - 2 = 0; \\ u'_z = 2z - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 1; \\ z = 1. \end{cases}$$

Внутри полушара обнаружилась только одна возможная экстремальная точка $M_1(1, 1, 1)$ (для этой точки неравенство $x^2 + y^2 + z^2 < 4$ выполняется).

2) Теперь найдём возможные экстремальные точки на полусфере

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}.$$

Эти точки будем искать как точки условного экстремума функции u при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$. Выпишем функцию Лагранжа

$$L(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4),$$

тогда для нахождения координат стационарных точек получаем систему

$$\begin{cases} L'_x = 2x - 2 + 2\lambda x = 0; \\ L'_y = 2y - 2 + 2\lambda y = 0; \\ L'_z = 2z - 2 + 2\lambda z = 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}}; \\ y = \frac{2}{\sqrt{3}}; \\ z = \frac{2}{\sqrt{3}}; \\ \lambda = \frac{\sqrt{3}-2}{2}. \end{cases}$$

Получили, что возможной экстремальной точкой на полусфере S является точка $M_2(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$.

3) Найдём теперь возможную экстремальную точку $M_3(x, y, 0)$ на оставшейся границе – круге $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$. Так как в точках этого круга имеем $u(x, y, z) = u(x, y, 0) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$, то координаты экстремальной точки, лежащей внутри этого круга, должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} u'_x = 2x - 2 = 0; \\ u'_y = 2y - 2 = 0; \\ z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 1; \\ z = 0; \end{cases}$$

т. е. нашлась точка $M_3(1, 1, 0)$.

4) Наконец, осталось найти точку возможного экстремума $M_4(x, y, 0)$ на окружности $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$. Опять запишем функцию Лагранжа (уже для этой задачи):

$$L(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z + \lambda(x^2 + y^2 - 4) + \mu z.$$

Координаты критических точек этой функции должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} L'_x = 2x - 2 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 2y - 2 + 2\lambda y = 0, \\ L'_z = 2z - 2 + \mu = 0, \\ x^2 + y^2 = 4; \quad z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим две возможные экстремальные точки на окружности: $M_4(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ и $M_5(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

5) Итак, наибольшее и наименьшее значения в полушаре D функция u может достигать только в одной из пяти точек: $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$, $M_3(1, 1, 0)$, $M_4(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ и $M_5(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$. Вычислим значения функции в этих точках: $u(M_1) = -3$, $u(M_2) = -4(\sqrt{3} - 1)$, $u(M_3) = -2$, $u(M_4) = -4(\sqrt{2} - 1)$, $u(M_5) = 4(\sqrt{2} + 1)$. Выбирая наибольшее и наименьшее из этих чисел, приходим к ответу:

$$\max_{M \in D} u(M) = u(M_5) = 4(\sqrt{2} + 1), \quad \min_{M \in D} u(M) = u(M_1) = -3. \quad \square$$

10.4 Задачи для самостоятельного решения

№487. Не используя метода множителей Лагранжа, найти экстремумы

$$u = x + y + z^2, \quad \text{если } z - x = 1, \quad y - xz = 1.$$

№488. Используя метод исключения части переменных, найти экстремумы

$$u = xyz, \quad \text{если } x + y - z = 3, \quad x - y - z = 8.$$

Исследовать на условный экстремум методом неопределённых множителей Лагранжа функции:

№489. [8, № 3656] $z(x, y) = x^2 + y^2$, если $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;

№490. [5, Пример № 8.50] $z = x^2 - y^2$, если $2x - y - 3 = 0$;

№491. $f(x, y) = x^2 + xy - 3y^2$, если $x - y = 2$;

№492. $f(x, y) = xy - y + 3x - 3$, если $x + 2y = 3$;

№493. $f(x, y) = x^2 + xy - 6y^2$, если $2x + y = 3$;

№494. $f(x, y) = x^2 + xy - 6y^2$, если $x + 2y = 4$;

№495. $f(x, y) = x^2 + xy - 6y^2$, если $x + 3y = 4$;

№496. $f(x, y) = xy$, если $2x + 3y - 5 = 0$.

Указание: воспользоваться критерием Сильвестра в форме (3).

№497. $f(x, y) = 3x + 4y + 5$, если $x^2 + y^2 = 100$;

№498. $f(x, y) = 3 - 2x - y$, если $x^2 - y^2 = 1$;

№499. $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

№500. $f(x, y, z) = x + y + z$, если $x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 50$;

№501. $u(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, если $2x - y - 3 = 0$;

№502. [10, с. 125] $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$, если $xyz = 108$;

№503. [8, № 3664] $u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$, если $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ ($x > 0, y > 0, z > 0$);

№504. $u = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z$, если $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ ($x > 0, y > 0, z > 0$);

№505. [8, № 3660] $u = x^m y^n z^p$, если $x + y + z = a$ ($x, y, z, m, n, p, a > 0$);

№506. [8, № 3668] $u = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$, если $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ ($a > 0, p > 1$);

№507. [8, № 3667] $u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, если $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$

($a_i > 0, i = \overline{1, n}$);

№508. [8, № 3670] Используя предварительное логарифмирование, найти экстремумы функции $u = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ при условии

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \quad (a > 0, \alpha_i > 1, x_i > 0, i = \overline{1, n}).$$

№509. [8, № 3672] Доказать неравенство, если $n \geq 1$ и $x \geq 0, y \geq 0$:

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2} \right)^n.$$

Указание: искать минимум функции $z = \frac{x^n + y^n}{2}$ при условии $x + y = s$.

№510. [8, № 3661] Найти экстремумы функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{если} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0).$$

№511. [5, № 8.51] Имеет ли функция

$$u = xy + xz + yz$$

условный экстремум в точке $M_0(1, 1, 1)$, если $2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 17 = 0$.

№512. Найти экстремум функции

$$u = x + y + z^2$$

при условии уравнений связи $z - x = 1$, $y - xz = 1$.

№513. [8, № 3663] Найти экстремумы функции

$$u = xyz, \quad \text{если} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0.$$

№514. [8, № 3663(б)] Найти условные экстремумы функции

$$u = xy + yz, \quad \text{если} \quad x^2 + y^2 = 2, \quad y + z = 2 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

Задачи на нахождение наименьшего (наибольшего) значения функции:

№515. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$$

на эллипсе $9x^2 + 4y^2 = 36$, не прибегая к методу множителей Лагранжа.

Указание: воспользоваться параметрическими уравнениями эллипса $x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$, где $t \in [0, 2\pi]$.

№516. Решить задачу нахождения экстремума функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

при условиях $x^2 + y^2 = z^2$ и $y + z = 1$, не прибегая к методу множителей Лагранжа.

Указание: исключить две переменные из трёх и свести к задаче на экстремум функции одной переменной.

№517. [8, № 3676] Определить наибольшее ($\sup z$) и наименьшее ($\inf z$) значения функции

$$z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$$

на множестве $x^2 + y^2 \leq 25$.

№518. [8, №3678] Определить наибольшее ($\sup z$) и наименьшее ($\inf z$) значения функции

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

на множестве $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$.

№519. [8, №3677] Определить наибольшее ($\sup z$) и наименьшее ($\inf z$) значения функции

$$z = x^2 - xy + y^2, \quad \text{если } |x| + |y| \leq 1.$$

№520. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 3xy$$

в квадрате $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.

№521. [8, №3675] Определить наибольшее ($\sup z$) и наименьшее ($\inf z$) значения функции

$$z = x - 2y - 3$$

на множестве $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1$.

№522. [10, с. 127] Исследовать на глобальный экстремум функцию

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

в замкнутой области $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$.

№523. На плоскости дан треугольник, образованный осями координат и прямой $x + y - 1 = 0$. Найти внутри треугольника точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.

№524. Представить положительное число a в виде суммы пяти положительных слагаемых так, чтобы их произведение имело наибольшее значение.

№525. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

№526. На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку, наиболее удалённую от точки $T(0, 0, 3)$.

10.5 Ответы и решения

487. Последовательно исключая переменные, находим $z = x + 1$, $y = xz + 1 = x^2 + x + 1$ и, подставляя в исходное уравнение, приходим к функции одной переменной $u = 2x^2 + 4x + 2 = 2(x + 1)^2$, для которой осталось решить задачу о безусловном экстремуме. Очевидно, данная функция имеет локальный минимум при $x = -1$ ($\Rightarrow y = 1, z = 0$), равный 0. Ответ: функция $u = x + y + z^2$ имеет в точке $(-1, 1, 0)$ условный локальный минимум, равный 0.

488. Выразим из условий связи x и y через z : вычитая из первого уравнения второе, получим $y = -\frac{5}{2}$ и, подставляя в систему, находим $x = z + \frac{11}{2}$. Тогда функция примет вид $u = u(x, y, z) = -\frac{5}{2}z^2 - \frac{55}{4}z = -\frac{5}{2}(z + \frac{11}{4})^2 + \frac{605}{32}$ и достигает локального максимума, равного $\frac{605}{32}$, при $x = -\frac{11}{4}$. Окончательно получаем, что в точке $(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4})$ функция имеет условный локальный максимум, равный $\frac{605}{32}$.

489. Составим вспомогательную функцию Лагранжа:

$$L(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right).$$

Исследуем функцию Лагранжа на безусловный экстремум (на плоскости $\mathbb{R}^2$).

1) Принимая во внимание необходимое условие экстремума, найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + \frac{\lambda}{a} = 0, \\ L'_y = 2y + \frac{\lambda}{b} = 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2a}, \\ y = -\frac{\lambda}{2b}, \\ \lambda = -\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

2) Проверим достаточное условие экстремума, исследуя знак второго дифференциала в окрестности точки $M_0(-\frac{\lambda}{2a}, -\frac{\lambda}{2b})$. Вычислим сначала первый, а затем второй дифференциал в точке (x, y) :

$$dL(x, y) = \frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial y} dy = \left(2x + \frac{\lambda}{a} \right) dx + \left(2y + \frac{\lambda}{b} \right) dy \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} d^2L(x, y) &= d(dL) = d \left(\left(2x + \frac{\lambda}{a} \right) dx + \left(2y + \frac{\lambda}{b} \right) dy \right) = 2dx^2 + 2dy^2 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow d^2L(x_0, y_0) > 0, \end{aligned}$$

т. е., согласно достаточному условию существования экстремума, в точке M_0 функция $z(x, y)$ имеет условный локальный минимум, равный

$$z_{\min} = z(x_0, y_0) = z \left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2b}{a^2 + b^2} \right) = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

490. Выпишем функцию Лагранжа $L(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y - 3)$. Координаты критических точек этой функции находим из системы (необходимое условие экстремума)

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda = 0, \\ L'_y = -2y - \lambda = 0, \\ 2x - y - 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

Итак, $M_0(2, 1)$ – единственная точка возможного экстремума и ей отвечает значение множителя Лагранжа $\lambda = -2$.

Вычислим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2L(x, y) = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 = 2dx^2 - 2dy^2.$$

Видим, что выражение $d^2L(M_0) = 2dx^2 - 2dy^2$ есть знакопеременная квадратичная форма. Однако из условия связи имеем $2dx = dy$. Подставляя это во второй дифференциал, находим $d^2L(M_0) = -6dx^2 < 0$. Это уже отрицательно определённая квадратичная форма, и поэтому точка $M_0(2, 1)$ является точкой локального максимума функции z при условии связи $2x - y - 3 = 0$. Подставляя координаты экстремальной точки в функцию, находим само экстремальное значение: $z_{\max} = z(2, 1) = 3$.

491. Согласно методу Лагранжа, задача нахождения условных экстремумов у функции f сводится к задаче определения безусловных экстремумов у её функции Лагранжа. В данном случае функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y) = x^2 + xy - 3y^2 + \lambda(x - y - 2).$$

1) Найдём точки возможного экстремума, решив систему уравнений (необходимое условие экстремума):

$$\begin{cases} L'_x = 2x + y + \lambda = 0, \\ L'_y = x - 6y - \lambda = 0, \\ x - y - 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\lambda}{13}, \\ y = -\frac{3\lambda}{13}, \\ \lambda = -13, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 3, \\ \lambda = -13. \end{cases}$$

Итак, $M(5, 3)$ – единственная точка возможного экстремума и ей отвечает значение $\lambda = -13$.

2) Проверим, является ли эта точка экстремальной. Для этого вычислим в этой точке 2-й дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 = 2dx^2 + 2dxdy - 6dy^2.$$

Для установления знака 2-го дифференциала в точке $M(5, 3)$ продифференцируем уравнение связи: $dx = dy$. С учётом этого получим $d^2L = 4dx^2 - 6dx^2 < 0$,

следовательно, $M(5, 3)$ – точка условного максимума, а значение экстремума равно $f(5, 3) = 5^2 + 15 - 3 \cdot 3^2 = 13$.

Замечание. Задачу можно было также решить с помощью расширенной модификации критерия Сильвестра.

492. Согласно методу Лагранжа, задача нахождения условных экстремумов у функции f сводится к задаче определения безусловных экстремумов у её функции Лагранжа. В данном случае функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y) = xy - y + 3x - 3 + \lambda(x + 2y - 3).$$

1) Найдём точки возможного экстремума, решив систему уравнений (необходимое условие экстремума):

$$\begin{cases} L'_x = y + 3 + \lambda = 0, \\ L'_y = x - 1 + 2\lambda = 0, \\ x + 2y - 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = -1, \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

2) Проверим, является ли эта точка экстремальной, вычислив в этой точке 2-й дифференциал функции Лагранжа ($L''_{xx} = 0$, $L''_{yy} = 0$, $L''_{xy} = 1$):

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 = 2 dx dy.$$

Для установления знака 2-го дифференциала в точке M продифференцируем уравнение связи: $dx + 2dy = 0$. С учётом этого получим $d^2L = -dx^2 < 0$, следовательно, $M(5, -1)$ – точка условного максимума, а значение экстремума равно $f(5, -1) = 8$.

493. Выпишем функцию Лагранжа

$$L(x, y) = x^2 + xy - 6y^2 + \lambda(2x + y - 3).$$

1) Найдём точки возможного экстремума, решив систему уравнений (необходимое условие экстремума):

$$\begin{cases} L'_x = 2x + y + 2\lambda = 0, \\ L'_y = x - 12y + \lambda = 0, \\ 2x + y = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = 0, \\ \lambda = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

2) Проверим, является ли эта точка $M(\frac{3}{2}, 0)$ экстремальной, вычислив в ней 2-й дифференциал функции Лагранжа ($L''_{xx} = 2$, $L''_{yy} = -12$, $L''_{xy} = 1$):

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 = 2dx^2 + 2dx dy - 12dy^2.$$

Для установления знака 2-го дифференциала в точке M продифференцируем дополнительно уравнение связи: $2dx + dy = 0$. С учётом этого получим

$$d^2L = -50dx^2 < 0,$$

следовательно, $M(\frac{3}{2}, 0)$ – точка условного максимума, а значение экстремума равно $f(\frac{3}{2}, 0) = \frac{9}{4}$.

494. $M(7, -\frac{3}{2})$ – точка условного максимума. См. решение предыдущей задачи. $f_{\max} = f(7, -\frac{3}{2}) = 25$.

495. Согласно методу Лагранжа, задача нахождения условных экстремумов у функции f сводится к задаче определения безусловных экстремумов у её функции Лагранжа. В данном случае функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y) = x^2 + xy - 6y^2 + \lambda(x + 3y - 4).$$

Найдём точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + y + \lambda = 0, \\ L'_y = x - 12y + 3\lambda = 0, \\ x + 3y = 4. \end{cases}$$

Так как данная система не имеет решений, то отсутствуют точки возможного экстремума, а значит, функция не имеет экстремумов.

496. Составим функцию Лагранжа: $L = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$. Найдём стационарную точку:

$$\begin{cases} L'_x = y + 2\lambda = 0, \\ L'_y = x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y = 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4}, \\ y = \frac{5}{6}, \\ \lambda = -\frac{5}{12}. \end{cases}$$

Итак, $M_0(\frac{5}{4}, \frac{5}{6})$ – стационарная точка. Составим определитель из критерия (3):

$$A = \begin{vmatrix} 0 & F'_x & F'_y \\ F'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ F'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12, \quad \text{где } F(x, y) = 2x + 3y - 5.$$

Так как $A > 0$, то в точке M_0 функция имеет условный локальный максимум, равный $z_{\max} = z(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}) = \frac{25}{24}$.

497. Согласно методу Лагранжа, задача нахождения условных экстремумов у функции f сводится к задаче определения безусловных экстремумов у её функции Лагранжа. В данном случае функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y) = 3x + 4y + 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 100).$$

1) Найдём точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x = 3 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 4 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 100, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2\lambda}, \\ y = -\frac{2}{\lambda}, \\ \lambda = \pm\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Имеем две точки возможного экстремума: $M_1(-6, -8)$ при $\lambda = \frac{1}{4}$, а также $M_2(6, 8)$ при $\lambda = -\frac{1}{4}$.

2) Проверим точки на экстремальность. Для этого вычислим в этих точках 2-й дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2.$$

Поэтому

$$d^2L(M_1) = \frac{1}{2} (dx^2 + dy^2) > 0, \quad d^2L(M_2) = -\frac{1}{2} (dx^2 + dy^2) < 0,$$

следовательно, M_1 — точка условного минимума, $f(-6, -8) = -45$, M_2 — точка условного максимума, $f(6, 8) = 55$.

498. Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y) = 3 - 2x - y + \lambda(x^2 - y^2 - 1).$$

1) Найдём точки возможного экстремума, решив систему уравнений (необходимое условие экстремума):

$$\begin{cases} L'_x = -2 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = -1 - 2\lambda y = 0, \\ x^2 - y^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Итак, имеем две стационарные точки: $M_1(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ ($\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$) и $M_2(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ($\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$).

2) Проверим в этих точках достаточное условие экстремальности. Для этого вычислим в этих точках 2-й дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 = 2\lambda dx^2 - 2\lambda dy^2.$$

Поэтому

$$d^2L(M_1) = \sqrt{3} (dx^2 - dy^2), \quad d^2L(M_2) = -\sqrt{3} (dx^2 - dy^2).$$

Чтобы оценить знак второго дифференциала в точках M_1 и M_2 , продифференцируем уравнение связи: $xdx = ydy$.

В точке M_1 это даёт дополнительно условие $\frac{2}{\sqrt{3}}dx = -\frac{1}{\sqrt{3}}dy$, т. е. $dy = -2dx$, но тогда

$$d^2L(M_1) = \sqrt{3}(dx^2 - dy^2) = -3\sqrt{3}dx^2 < 0.$$

Следовательно, M_1 – точка условного максимума.

В точке M_2 имеем $xdx = ydy \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}dy$, т. е. $dy = -2dx$, но тогда

$$d^2L(M_2) = -\sqrt{3}(dx^2 - dy^2) = 3\sqrt{3}dx^2 > 0.$$

Значит, M_2 – точка условного минимума.

499. Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

1) Найдём точки возможного экстремума, решив систему уравнений (необходимое условие экстремума):

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = -2 + 2\lambda y = 0, \\ L'_z = 2 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp \frac{1}{3}, \\ y = \pm \frac{2}{3}, \\ z = \mp \frac{2}{3}, \\ \lambda = \pm \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Итак, имеем две точки возможного экстремума: $A(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ с $\lambda = \frac{3}{2}$, $B(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ с $\lambda = -\frac{3}{2}$.

2) Проверим, являются ли эти точки экстремальными. Для этого вычислим 2-й дифференциал функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} d^2L &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} dy dz = \\ &= 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 + 2\lambda dz^2 + 0 \cdot dx dy + 0 \cdot dx dz + 0 \cdot dy dz. \end{aligned}$$

Тогда $d^2L(A) = 3(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0 \Rightarrow A$ – это точка минимума, $f_{\min} = -3$; $d^2L(B) = -3(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0 \Rightarrow B$ – это точка максимума, $f_{\max} = 3$.

500. Ответ: $A\left(\frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{10}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}}\right)$ – точка условного максимума ($\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{20}$), $f(A) = 5\sqrt{3}$; $B\left(-\frac{10}{\sqrt{3}}, -\frac{10}{3\sqrt{3}}, -\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)$ ($\lambda = \frac{\sqrt{3}}{20}$) – точка минимума, $f(B) = -5\sqrt{3}$. См. решение предыдущей задачи.

501. Введём функцию Лагранжа

$$L = x^2 - y^2 + z^2 + \lambda(2x - y - 3)$$

и найдём точки её возможного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda = 0, \\ L'_y = -2y - \lambda = 0, \\ L'_z = 2z = 0, \\ 2x - y - 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \\ z = 0, \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

Проверим в единственной стационарной точке выполнение достаточного условия экстремума. Найдём для этого второй дифференциал: $d^2L = 2dx^2 - 2dy^2 + 2dz^2$. Продифференцировав уравнение связи, получим соотношение между дифференциалами $dy = 2dx$ и подставим во второй дифференциал:

$$d^2L = 2(dx^2 - dy^2 + dz^2) = 2(dx^2 - (2dx)^2 + dz^2) = -6dx^2 + 2dz^2.$$

При $dx = 0$, $dz \neq 0$ имеем $d^2L > 0$, а при $dx \neq 0$, $dz = 0$ имеем $d^2L < 0$. Следовательно, экстремума в найденной точке нет.

502. Используя функцию Лагранжа $L(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 108)$, для нахождения точек возможного экстремума составим систему

$$\begin{cases} L'_x = y + 2z + \lambda yz = 0, \\ L'_y = x + 2z + \lambda xz = 0, \\ L'_z = 2x + 2y + \lambda xy = 0, \\ xyz = 108, \end{cases}$$

из которой находим единственную стационарную точку $M_0(6, 6, 3)$ при $\lambda = -\frac{2}{3}$.

Для анализа достаточных условий экстремума рассмотрим второй дифференциал лагранжиана:

$$\begin{aligned} d^2L &= L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + 2L''_{xz}dxdz + 2L''_{yz}dydz = \\ &= 2(1 + \lambda z)dxdy + 2(2 + \lambda y)dxdz + 2(1 + \lambda x)dydz. \end{aligned}$$

В точке M_0 имеем: $d^2L(M_0) = -2dxdy - 4dxdz - 4dydz$. Найдём связь между величинами dx , dy и dz , дифференцируя уравнения связи: $xydz + xzdy + yzdx = 0$. В точке M_0 имеем соотношение $36dz + 18dy + 18dx = 0$, или $2dz = -dy - dx$. С учётом этого второй дифференциал принимает вид:

$$d^2L(M_0) = 2(dx^2 + dy^2 + dxdy) = 2 \left(\frac{3}{4}dx^2 + \left(\frac{dx}{2} + dy \right)^2 \right) > 0.$$

Таким образом, в точке M_0 функция $f(x, y, z)$ имеет условный минимум, равный $f(6, 6, 3) = 108$.

503. Для удобства исследуем на экстремумы не саму функцию u , а $\ln u$ (это можно сделать в силу её положительности). Составим функцию Лагранжа

$$L = \ln \sin x + \ln \sin y + \ln \sin z + \lambda \left(x + y + z - \frac{\pi}{2} \right)$$

и найдём её стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = \operatorname{ctg} x + \lambda = 0, \\ L'_y = \operatorname{ctg} y + \lambda = 0, \\ L'_z = \operatorname{ctg} z + \lambda = 0, \\ x + y + z = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решив систему, получаем единственную точку возможного экстремума $x = y = z = \frac{\pi}{6}$. Для проверки достаточного условия оценим знак второго дифференциала функции Лагранжа:

$$dL = (\operatorname{ctg} x + \lambda)dx + (\operatorname{ctg} y + \lambda)dy + (\operatorname{ctg} z + \lambda)dz,$$

$$d^2L = - \left(\frac{dx^2}{\sin^2 x} + \frac{dy^2}{\sin^2 y} + \frac{dz^2}{\sin^2 z} \right) < 0,$$

поэтому в точке $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right)$ функция имеет максимум, равный

$$u_{\max} = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}.$$

504. В точке $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right)$ функция имеет максимум, равный $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. См. решение предыдущей задачи.

505. Для упрощения решения задачи воспользуемся очевидным фактом, что экстремальные точки функций u и $\ln u$ совпадают. Поэтому будем исследовать на условный экстремум функцию $v = \ln u \equiv m \ln x + n \ln y + p \ln z$ при условии $x + y + z = a$.

1) Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z) = m \ln x + n \ln y + p \ln z + \lambda(x + y + z - a)$$

и найдём её стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = \frac{m}{x} + \lambda = 0, \\ L'_y = \frac{n}{y} + \lambda = 0, \\ L'_z = \frac{p}{z} + \lambda = 0, \\ x + y + z = a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{m}{\lambda}, \\ y = -\frac{n}{\lambda}, \\ z = -\frac{p}{\lambda}, \\ \lambda = -\frac{m+n+p}{a}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{ma}{m+n+p}, \\ y = \frac{na}{m+n+p}, \\ z = \frac{pa}{m+n+p}, \\ \lambda = -\frac{m+n+p}{a}. \end{cases}$$

2) Оценим знак d^2L :

$$d^2L(x, y, z) = -\frac{m}{x^2}dx^2 - \frac{n}{y^2}dy^2 - \frac{p}{z^2}dz^2 < 0.$$

Следовательно, в единственной найденной точке функция $v = \ln u$ (а значит, и сама функция u) имеет условный максимум. Подставляя в исходную функцию, находим его значение:

$$u_{max} = \left(\frac{ma}{m+n+p}\right)^m \left(\frac{na}{m+n+p}\right)^n \left(\frac{pa}{m+n+p}\right)^p = \frac{m^m n^n p^p a^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}.$$

506. 1) Составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^p + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - a \right)$$

и найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_{x_i} = px_i^{p-1} + \lambda = 0, & i = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n x_i = a & (\text{уравнение связи}). \end{cases}$$

Отсюда получаем $\lambda = -p \left(\frac{a}{n}\right)^{p-1}$ и единственную стационарную точку $x_1^\circ = x_2^\circ = \dots = x_n^\circ = \frac{a}{n}$.

2) Найдём d^2L :

$$dL(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n p \cdot x_i^{p-1} dx_i + \lambda \sum_{i=1}^n dx_i, \quad d^2L(x_1, \dots, x_n) = p(p-1) \sum_{i=1}^n x_i^{p-2} dx_i^2.$$

Тогда $d^2L(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ) = p(p-1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{n}\right)^{p-2} dx_i^2 > 0$. Следовательно, в стационарной точке $M_0(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)$ функция Лагранжа, а следовательно, и функция u имеет условный минимум $u_{\min} = u\left(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{n}\right)^p = \frac{a^p}{n^{p-1}}$.

507. Составим функцию Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right)$$

и найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_{x_i} = 2x_i + \lambda \cdot \frac{1}{a_i} = 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} = 1 & (\text{уравнение связи}). \end{cases}$$

Из этой системы получаем единственную точку возможного экстремума $x_i = 1 / \left(a_i \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} \right)$, $(i = \overline{1, n})$ и отвечающее ей значение двойственной переменной $\lambda = -2 / \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} \right)$. Проверим в этой точке достаточные условия экстремума:

$$dL = \sum_{i=1}^n \left(2x_i + \frac{\lambda}{a_i} \right) dx_i, \quad d^2L = 2 \sum_{i=1}^n dx_i^2 > 0.$$

Следовательно, в найденной стационарной точке функция u имеет минимум. Подставляя в функцию координаты точки, находим это минимальное значение $u_{\min} = 1 / \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} \right)$.

508. Заметим, что экстремальные точки функций u и $\ln u$ совпадают в силу возрастания натурального логарифма (при этом функция положительна и поэтому возможно её предварительное логарифмирование). Задача упрощается за счёт того, что произведение в записи функции u превращается в сумму $\ln u$. Исследуем на условный экстремум функцию $\ln u$. Составим для неё функцию Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - a \right)$$

и найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_{x_i} = \frac{\alpha_i}{x_i} + \lambda = 0, \\ \sum_{i=1}^n x_i = a \quad (\text{уравнение связи}). \end{cases}$$

Отсюда получаем координаты точки M возможного экстремума и соответствующее значение множителя Лагранжа:

$$x_i = \frac{a\alpha_i}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} \quad (i = \overline{1, n}), \quad \lambda = -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Найдём второй дифференциал

$$dL = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{x_i} + \lambda \right) dx_i, \quad d^2L = - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x_i^2} dx_i^2$$

и оценим его знак в этой точке:

$$d^2L(M) = -\frac{1}{a^2} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^2 \sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{\alpha_i} < 0.$$

Следовательно, в точке M функция $\ln u$, а значит и функция u , имеет максимум. Подставляя координаты точки M в функцию u , находим этот условный максимум:

$$u_{\max} = \alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \alpha_n^{\alpha_n} \left(a / \sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}.$$

509. Исследуем на условный экстремум функцию z . Составим функцию Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(x + y - s).$$

Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = \frac{nx^{n-1}}{2} + \lambda = 0, \\ L'_y = \frac{ny^{n-1}}{2} + \lambda = 0, \\ x + y = s, \end{cases}$$

откуда $M\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)$, $\lambda = -\frac{n}{2}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-1}$.

Вычислим сначала первый, а затем второй дифференциалы:

$$dL = \left(\frac{nx^{n-1}}{2} + \lambda\right) dx + \left(\frac{ny^{n-1}}{2} + \lambda\right) dy, \quad d^2L = \frac{n(n-1)}{2} (x^{n-2} dx^2 + y^{n-2} dy^2).$$

Тогда $d^2L(M) = \frac{n(n-1)}{2} \left(\left(\frac{s}{2}\right)^{n-2} dx^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^{n-2} dy^2 \right) > 0$. Следовательно, функция z имеет в точке M минимум, т. е.

$$z_{\min} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{s}{2}\right)^n + \left(\frac{s}{2}\right)^n \right) = \left(\frac{s}{2}\right)^n = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq z(x, y).$$

Итак, $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$.

510. 1) Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

и найдём для неё точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ L'_y = 2y + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ L'_z = 2z + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \left(1 + \frac{\lambda}{a^2} \right) = 0, \\ 2y \left(1 + \frac{\lambda}{b^2} \right) = 0, \\ 2z \left(1 + \frac{\lambda}{c^2} \right) = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases}$$

Если $\lambda \neq -a^2$, $\lambda \neq -b^2$, $\lambda \neq -c^2$, то $x = y = z = 0$, что не удовлетворяет последнему уравнению системы.

Если $\lambda = -a^2$, то $y = z = 0$ и получили точки $M_{1,2}(\pm a, 0, 0)$.

Если $\lambda = -b^2$, то $x = z = 0$ и получили точки $M_{3,4}(0, \pm b, 0)$.

Если $\lambda = -c^2$, то $x = y = 0$ и получили точки $M_{5,6}(0, 0, \pm c)$.

2) Для проверки достаточных условий найдём d^2L :

$$dL(x, y, z) = 2x \left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) dx + 2y \left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) dy + 2z \left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right) dz,$$

$$d^2L = d(dL) = 2 \left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) dx^2 + 2 \left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) dy^2 + 2 \left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right) dz^2.$$

Исследуем знак d^2L в стационарных точках.

а) $d^2L(M_{1,2}) = 2 \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) dy^2 + 2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) dz^2 < 0$, т. к. $\frac{a^2}{c^2} > 1$, $\frac{a^2}{b^2} > 1$. Следовательно, в точках $M_{1,2}$ функция имеет условный максимум $u_{\max} = u(M_{1,2}) = a^2$.

б) $d^2L(M_{3,4}) = 2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) dx^2 + 2 \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) dz^2$. При $dx = 0$, $dz \neq 0$ имеем $d^2L(M_{3,4}) < 0$, а при $dx \neq 0$, $dz = 0$ имеем $d^2L(M_{3,4}) > 0$. Следовательно, точки $M_{3,4}$ не являются экстремальными.

в) $d^2L(M_{5,6}) = 2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) dx^2 + 2 \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) dy^2 > 0$. Следовательно, в точках $M_{5,6}$ функция имеет условный минимум $u_{\min} = u(M_{5,6}) = c^2$.

511. Выпишем функцию Лагранжа для этой задачи

$$L(x, y, z) = xy + xz + yz + \lambda(2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 17).$$

Координаты критической точки лагранжиана должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} L'_x = y + z + 6\lambda x^2y^2z + 8\lambda x = 0, \\ L'_y = x + z + 4\lambda x^3yz + 10\lambda y = 0, \\ L'_z = x + y + 2\lambda x^3y^2 + 12\lambda z = 0, \\ 2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 17 = 0. \end{cases}$$

Проверка показывает, что $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $\lambda = -\frac{1}{7}$ есть одно из решений этой системы. Следовательно, в точке $M_0(1, 1, 1)$ возможен условный экстремум функции $u(x, y, z)$ при условии $2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 17 = 0$, причём соответствующий множитель Лагранжа $\lambda = -\frac{1}{7}$. Находим второй дифференциал функции:

$$d^2L(x, y, z) = 2dxdy + 2dxdz + 2dydz.$$

В силу уравнения связи

$$\begin{aligned} d(2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 17) = \\ = 6x^2y^2zdx + 4yx^3zdy + 2x^3y^2dz + 8xdx + 10ydy + 12zdz = 0, \end{aligned}$$

поэтому в точке $M_0(1, 1, 1)$ получаем $6dx + 4dy + 2dz + 8dx + 10dy + 12dz = 0$, откуда $dz = -dx - dy$, и, следовательно,

$$d^2L(M_0) = 2dxdy - 2dx^2 - 2dxdy - 2dy^2 - 2dxdy = -2(dx^2 + dxdy + dy^2).$$

Поскольку $d^2L(M_0) < 0$, т. е. является отрицательно определённой квадратичной формой, то точка $M_0(1, 1, 1)$ есть точка условного максимума функции u . Подставляя в функцию, находим $u_{\max} = u(1, 1, 1) = 3$.

512. Выпишем функцию Лагранжа: $L = x + y + z^2 + \lambda(z - x - 1) + \mu(y - xz - 1)$.

1) Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = 1 - \lambda - \mu z = 0, \\ L'_y = 1 + \mu = 0, \\ L'_z = 2z + \lambda - \mu x = 0, \\ z - x - 1 = 0, \\ y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим стационарную точку $M_0(-1, 1, 0)$ при $\lambda = 1, \mu = -1$.

2) Найдём второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2(L''_{xy}dxdy + L''_{yz}dydz + L''_{xz}dxdz) = \\ = (2dz^2 - 2\mu dxdz)\Big|_{M_0} = 2dz^2 + 2dxdz. \end{aligned}$$

Продифференцируем уравнения связи:

$$\begin{cases} dz - dx = 0, \\ dy - xdz - zdx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = dz, \\ dy = -dz. \end{cases}$$

Подставляя во второй дифференциал, получим $d^2L(M_0) = 4dz^2 > 0$. Следовательно, точка $M_0(-1, 1, 0)$ является точкой условного локального минимума $u_{\min} = 0$. Эту задачу можно было решить методом исключения неизвестных.

513. Составим вспомогательную функцию Лагранжа

$$L = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z)$$

и найдём точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x = yz + 2\lambda x + \mu = 0, & (1) \\ L'_y = xz + 2\lambda y + \mu = 0, & (2) \\ L'_z = xy + 2\lambda z + \mu = 0, & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, & (4) \\ x + y + z = 0. & (5) \end{cases}$$

Сложим (1) + (2) + (3): $xy + yz + xz + 3\mu = 0$ (6).

Возведём (5) в квадрат: $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 0$, откуда $xy + xz + yz = -\frac{1}{2}$. Подставим в (6) и найдём $\mu = \frac{1}{6}$.

Сложим (1)+(2): $z(x+y) + 2\lambda(x+y) + 2\mu = 0$, откуда с учётом $x+y = -z$ и $\mu = \frac{1}{6}$ находим $3z^2 + 6\lambda z - 1 = 0$ (7).

Умножим (1) на x : $xyz + 2\lambda x^2 + \mu x = 0$, умножим (2) на y : $xyz + 2\lambda y^2 + \mu y = 0$ и вычтем друг из друга: $(x-y)(2\lambda(x+y) + \frac{1}{6}) = 0$. Так как $x+y = -z$, то получим два случая: $x-y = 0$ или $\lambda z = \frac{1}{12}$. В случае $\lambda z = \frac{1}{12}$ можно подставить в (7) и т. д.

Решив систему, получим шесть стационарных точек:

$M_1(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$, $M_2(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $M_3(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ при $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}}$, а также $M_4(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$, $M_5(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $M_6(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ при $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Выражая координаты точек через λ , получим:

$M_1(2\lambda, 2\lambda, -4\lambda)$, $M_2(2\lambda, -4\lambda, 2\lambda)$, $M_3(-4\lambda, 2\lambda, 2\lambda)$ при $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}}$, а также $M_4(2\lambda, 2\lambda, -4\lambda)$, $M_5(2\lambda, -4\lambda, 2\lambda)$, $M_6(-4\lambda, 2\lambda, 2\lambda)$ при $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Для проверки в каждой из этих точек достаточных условий экстремума, вычислим второй дифференциал:

$$\begin{aligned} d^2L &= L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + 2L''_{xz}dxdz + 2L''_{yz}dydz = \\ &= 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2zdx dy + 2ydx dz + 2xdy dz. \end{aligned}$$

Из уравнений связи, дифференцируя (4) и (5), дополнительно получим соотношения:

$$d(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \Rightarrow 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0, \quad (8)$$

$$d(x + y + z) = 0 \Rightarrow dx + dy + dz = 0. \quad (9)$$

а) Тогда для точек M_1 и M_4 оценим знак второго дифференциала:

$$\begin{aligned} d^2L &= 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2zdx dy + 2ydx dz + 2xdy dz = \\ &= 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 8\lambda dx dy + 4\lambda dx dz + 4\lambda dy dz, \end{aligned}$$

кроме того, (8) и (9) дают: $2\lambda dx + 2\lambda dy - 4\lambda dz = 0$, $dx + dy + dz = 0$, откуда находим $dz = 0$, $dy = -dx$. С учётом $dz = 0$ выражение для d^2L принимает более простой вид:

$$d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2) - 8\lambda dx dy = 2\lambda(dx^2 - 4dx dy + dy^2),$$

а учитывая $dy = -dx$, получим

$$d^2L = 2\lambda(dx^2 + 4dx^2 + dx^2) = 12\lambda dx^2.$$

Поэтому $d^2L(M_1) = 12\lambda dx^2 = 12 \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} dx^2 > 0$, т. е. в точке M_1 функция имеет локальный минимум. Подставляя координаты точки в исходную функцию, находим его: $u_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

Соответственно, $d^2L(M_4) = 12\lambda dx^2 = -12 \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} dx^2 < 0$, т. е. в точке M_4 функция имеет локальный максимум. Подставляя координаты точки в исходную функцию, находим его: $u_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$.

б) Для точек M_2 и M_5 аналогично рассмотренному выше случаю устанавливаем, что в точке M_2 будет локальный минимум, равный $u_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$, а в точке M_5 — максимум, равный $u_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$.

в) Для точек M_3 и M_6 аналогично получаем: в M_3 будет локальный минимум $u_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$, а в M_6 — максимум $u_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$.

514. 1) Введём функцию Лагранжа и найдём её стационарные точки:

$$L = xy + yz + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(y + z - 2),$$

$$\begin{cases} L'_x = y + 2\lambda x = 0, & (1) \\ L'_y = x + z + 2\lambda y + \mu = 0, & (2) \\ L'_z = y + \mu = 0, & (3) \\ x^2 + y^2 = 2, & (4) \\ y + z = 2. & (5) \end{cases}$$

Решаем систему. Из (1) $\Rightarrow 2\lambda = -\frac{y}{x}$; (2) $\Rightarrow 2\lambda = -\frac{x+z+\mu}{y}$. Приравнявая, получаем $-\frac{y}{x} = -\frac{x+z+\mu}{y}$, т. е. $y^2 = x^2 + x(z+\mu)$ (*). Так как из (3) имеем $y = -\mu$, то $z = 2 - y = 2 + \mu$, $x^2 = 2 - y^2 = 2 - \mu^2$ и, подставляя в (*), получим $(-\mu)^2 = (2 - \mu^2) + x((2 + \mu) + \mu) \Rightarrow 2x(1 + \mu) = 2(\mu^2 - 1)$. Отсюда при $\mu \neq -1$ имеем $x = \mu - 1$. Далее, из (4) $\Rightarrow (\mu - 1)^2 + (-\mu)^2 = 2$, т. е. $\mu = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Но при $\mu = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ имеем $y < 0$, а при $\mu = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ получаем $x < 0$, т. е. решений в случае

$\mu \neq -1$ нет. Осталось рассмотреть случай $\mu = -1$, тогда имеем систему

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0, \\ x + z + 2\lambda y + \mu = 0, \\ y + \mu = 0, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = 1, \\ \lambda = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Единственная стационарная точка $M(1, 1, 1)$.

2) Проверим достаточное условие. Найдём второй дифференциал и оценим его знак:

$$\begin{aligned} dL &= (y + 2\lambda x)dx + (x + z + 2\lambda y + \mu)dy + (y + \mu)dz, \\ d^2L &= 2\lambda(dx^2 + dy^2) + 2(dxdy + dydz). \end{aligned}$$

Тогда $d^2L(M) = -(dx^2 + dy^2) + 2(dxdy + dydz)$. Из уравнения связи (5) следует, что $dy = -dz$. Из уравнения (4) также следует, что $2x dx + 2y dy = 0$. В точке M имеем $x = y = 1$ и последнее равенство принимает вид $x dx + y dy = 0$, т. е. $dy = -dx$. Поэтому

$$d^2L(M) = -(dx^2 + (-dx)^2) + 2(dx(-dx) + (-dx)dx) = -6dx^2 < 0.$$

Значит, в т. $M(1, 1, 1)$ функция имеет условный максимум, равный $u_{\max} = 2$.

515. Задача сводится к нахождению наименьшего и наибольшего значений функции одной переменной

$$\begin{aligned} g(t) &= 2(2 \cos t)^2 - (2 \cos t)(3 \sin t) + 2(3 \sin t)^2 = \\ &= 13 - 5 \cos 2t - 3 \sin 2t = 13 - \sqrt{34} \sin(2t + \varphi), \end{aligned}$$

где $\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{34}}$. Так как $|\sin(2t + \varphi)| \leq 1$, то множеством значений данной функции является отрезок $[13 - \sqrt{34}, 13 + \sqrt{34}]$, откуда легко определяются её наименьшее и наибольшее значения.

516. В данной задаче удаётся, используя уравнения связи, исключить две переменные из трёх и получить функцию одной переменной, т. е. свести к известной задаче на экстремум функции одной переменной. Действительно, выразим z из второго уравнения связи $z = 1 - y$, тогда из первого уравнения связи имеем $x^2 + y^2 = (1 - y)^2$, или $y = \frac{1 - x^2}{2}$ (следовательно, $z = 1 - y = \frac{1 + x^2}{2}$). Подставляя в исходную функцию, получаем функцию одной переменной x

$$f(x) = x^2 + \left(\frac{1 - x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{1}{2}.$$

Найдём её стационарные точки: $f'(x) = 2x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Так как $f''(x) = 2(3x^2 + 1)$, то

$$d^2 f(x) = 2(3x^2 + 1)dx^2 \Big|_{x=0} = 2dx^2 > 0,$$

следовательно, в этой точке функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум, равный $f(0) = \frac{1}{2}$. А значит, исходная функция u имеет в точке $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ строгий локальный минимум $u_{\min} = u(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

517. Функция z непрерывна на замкнутом ограниченном множестве в виде круга $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$, поэтому по 2-й теореме Вейерштрасса она достигает на этом множестве своих точных верхней и нижней граней. Очевидно, $\sup z$ ($\inf z$) равен наибольшему (соответственно, наименьшему) из значений функции z в точках возможного экстремума внутри круга $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 25\}$ или на его границе (окружности $x^2 + y^2 = 25$).

Найдём точки возможного экстремума внутри круга. Необходимое условие приводит к системе

$$\begin{cases} z'_x = 2x - 12 = 0, \\ z'_y = 2y + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = -8, \end{cases}$$

однако найденная стационарная точка не попадает во внутренность круга. Это означает, что экстремумы достигаются на границе круга. Чтобы найти их, имеем задачу поиска условного экстремума: определить экстремумы функции z при условии $x^2 + y^2 = 25$.

Воспользуемся методом Лагранжа и выпишем лагранжиан

$$L = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Решая систему

$$\begin{cases} L'_x = 2x - 12 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 2y + 16 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{1+\lambda}, \\ y = -\frac{8}{1+\lambda}, \\ (\frac{6}{1+\lambda})^2 + (-\frac{8}{1+\lambda})^2 = 25, \end{cases}$$

находим две точки: $M_1(3, -4)$ при $\lambda = 1$, $M_2(-3, 4)$ при $\lambda = -3$. Далее можно не исследовать функцию в каждой точке, выясняя, есть ли в ней экстремум и какой, а просто вычислить значения функции в этих точках (ясно, что в одной из них будет достигаться наибольшее, а в другой – наименьшее значения): $z(M_1) = -75$, $z(M_2) = 125$. Следовательно, $\sup z = 125$, $\inf z = -75$.

518. Так как функция непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве, то по теореме Вейерштрасса она достигает на нём своих точных граней (т. е. у неё существуют конечные наибольшее и наименьшее значения).

Найдём их. Разобьём исходное множество ограничений на открытый шар $\{x^2 + y^2 + z^2 < 100\}$ и его границу – сферу $\{x^2 + y^2 + z^2 = 100\}$, и поищем точки возможного экстремума на каждом из них двух подмножеств.

1) Определим точки безусловного возможного экстремума внутри множества:

$$\begin{cases} u'_x = 2x = 0, \\ u'_y = 4y = 0 \\ u'_z = 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Единственная стационарная точка $M_1(0, 0, 0)$ попадает в открытый шар $\{x^2 + y^2 + z^2 < 100\}$.

2) Найдём точки возможного экстремума на границе множества, т. е. на сфере. Это задача на поиск условного экстремума. Решим её методом множителей Лагранжа. Выпишем функцию Лагранжа

$$L = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 100)$$

и найдём её стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 4y + 2\lambda y = 0, \\ L'_z = 6z + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + \lambda) = 0, \\ y(2 + \lambda) = 0, \\ z(3 + \lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 100. \end{cases}$$

Если $\lambda = -1$, то $y = z = 0$, $x = \pm 10$, т. е. получаем точки $M_{2,3} = (\pm 10, 0, 0)$.

Если $\lambda = -2$, то $x = z = 0$, $y = \pm 10$, т. е. получаем точки $M_{4,5} = (0, \pm 10, 0)$.

Если $\lambda = -3$, то $x = y = 0$, $z = \pm 10$, т. е. получаем точки $M_{6,7} = (0, 0, \pm 10)$.

Найдём значения функции в этих точках: $u(M_1) = 0$, $u(M_{2,3}) = 100$, $u(M_{4,5}) = 200$, $u(M_{6,7}) = 300$ и выберем из них наибольшее и наименьшее. Отсюда получаем: $\sup z = 300$, $\inf z = 0$.

519. Функция z непрерывна на замкнутом ограниченном множестве в виде замкнутого квадрата $\{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$. Поэтому по 2-й теореме Вейерштрасса она достигает на этом множестве своих точных верхней и нижней граней. Разобьём замкнутую область $|x| + |y| \leq 1$ на её внутреннюю часть $|x| + |y| < 1$ и границу.

1) Найдём точки возможного экстремума внутри квадрата:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - y = 0, \\ z'_y = -x + 2y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

данная точка принадлежит внутренности квадрата, причём $z(0, 0) = 0$.

2) Найдём экстремальные значения функции z на границе области, т. е. при $|x| + |y| = 1$.

а) Пусть $x > 0$, $y > 0$, тогда имеем задачу: найти экстремумы функции $z = x^2 - xy + y^2$, если $x + y = 1$. Можно решить задачу «школьным» способом: выразить $y = 1 - x$, подставить в функцию z и дальше найти экстремумы полученной функции одной переменной x на интервале $(0, 1)$. Но решим задачу при помощи функции Лагранжа: $L = x^2 - xy + y^2 + \lambda(x + y - 1)$. Стационарные точки находим из системы

$$\begin{cases} L'_x = 2x - y + \lambda = 0, \\ L'_y = -x + 2y + \lambda = 0, \\ x + y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{2}, \\ \lambda = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

данная точка $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ принадлежит границе области, причём $z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

б) Пусть $x > 0$, $y < 0$, тогда имеем задачу: найти экстремумы функции $z = x^2 - xy + y^2$, если $x - y = 1$. Выпишем функцию Лагранжа $L = x^2 - xy + y^2 + \lambda(x - y - 1)$ и найдём точки её возможного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x = 2x - y + \lambda = 0, \\ L'_y = -x + 2y - \lambda = 0, \\ x - y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = -\frac{1}{2}, \\ \lambda = -\frac{3}{2}, \end{cases}$$

данная точка принадлежит границе области, причём $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

в) При $x < 0$, $y > 0$ имеем задачу: найти экстремумы функции $z = x^2 - xy + y^2$, если $-x + y = 1$. Выпишем функцию Лагранжа $L = x^2 - xy + y^2 + \lambda(-x + y - 1)$ и найдём точки её возможного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x = 2x - y - \lambda = 0, \\ L'_y = -x + 2y + \lambda = 0, \\ -x + y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{2}, \\ \lambda = -\frac{3}{2}, \end{cases}$$

данная точка также принадлежит соответствующей границе и $z(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

г) При $x < 0$, $y < 0$ имеем задачу: найти экстремумы функции $z = x^2 - xy + y^2$, если $-x - y = 1$. Выпишем функцию Лагранжа $L = x^2 - xy + y^2 + \lambda(-x - y - 1)$ и найдём её стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = 2x - y - \lambda = 0, \\ L'_y = -x + 2y - \lambda = 0, \\ x + y = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = -\frac{1}{2}, \\ \lambda = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{причём } z\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Наконец, проверим оставшиеся 4 угловые точки (вершины квадрата):

д) $x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$, тогда $z(0, \pm 1) = 1$.

е) $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, тогда $z(\pm 1, 0) = 1$.

Итак, $\sup z = \max \{0; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; 1\} = 1$, $\inf z = \min \{0; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; 1\} = 0$.

520. 1) Найдём стационарные точки (возможного экстремума) внутри области:

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0, \\ f'_y = 6y - 3x = 0, \end{cases}$$

откуда определяем две точки $M_1(0, 0)$ – на границе, $f(0, 0) = 0$, $M_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ – внутри области, $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -\frac{1}{16}$.

2) Исследуем поведение функции на границе области, рассмотрев поочерёдно четыре стороны квадрата.

а) $x = 0, 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow f = 3y^2$, поэтому $f_{\max} = 3$ при $x = 0, y = 1$; $f_{\min} = 0$ при $x = 0, y = 0$.

б) $0 \leq x \leq 2, y = 0 \Rightarrow f = x^3$, поэтому $f_{\max} = 8$ при $x = 2, y = 0$; $f_{\min} = 0$ при $x = y = 0$.

в) $x = 2, 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow f = 3y^2 - 6y + 8$, поэтому $f_{\max} = 8$ при $x = 2, y = 0$; $f_{\min} = 1$ при $x = 2, y = 1$.

г) $0 \leq x \leq 2, y = 1 \Rightarrow f = x^3 - 3x + 3, f' = 3x^2 - 3 = 0$ при $x = \pm 1$, поэтому $f_{\max} = 5$ при $x = 2, y = 1$; $f_{\min} = 1$ при $x = y = 1$.

Так как функция $f(x, y)$ непрерывна на компакте, то по теореме Вейерштрасса она достигает на нём своих наибольшего и наименьшего значений (либо внутри этого множества, либо на его границе). Осталось выбрать наибольшее и наименьшее значения из найденных экстремумов внутри и на границе. Ответ: $f_{\max} = 8$ при $x = 2, y = 0$; $f_{\min} = -\frac{1}{16}$ при $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$. Задача решалась без использования метода множителей Лагранжа.

521. Функция z непрерывна на замкнутом ограниченном множестве в виде треугольника $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1\}$. Поэтому по 2-й теореме Вейерштрасса она достигает на этом множестве своих точных граней. Разобьём замкнутую область на её внутреннюю часть и границу.

1) Найдём точки возможного экстремума внутри треугольника:

$$\begin{cases} z'_x = 1 \neq 0, \\ z'_y = -2 \neq 0, \end{cases}$$

что означает, что экстремальных точек внутри области нет и экстремумы достигаются на границе.

2) Найдём экстремальные значения функции z на границе области, состоящей из трёх отрезков.

а) Пусть $x = 0$ (левая сторона треугольника), тогда $z = -2y - 3$, где $y \in [0, 1]$, это убывающая функция, поэтому $z_{\max} = z|_{y=0} = -3$, $z_{\min} = z|_{y=1} = -5$.

б) Если $y = 0$ (нижняя сторона треугольника), тогда $z = x - 3$, где $x \in [0, 1]$, это возрастающая функция, поэтому $z_{\max} = z|_{x=1} = -2$, $z_{\min} = z|_{x=0} = -3$.

в) Если $x + y = 0$ (правая сторона треугольника), то воспользуемся методом неопределённых множителей Лагранжа и составим функцию Лагранжа $L = x - 2y - 3 + \lambda(x + y)$. Выписав систему для нахождения стационарных точек

$$\begin{cases} L'_x = 1 + \lambda = 0, \\ L'_y = -2 + \lambda = 0, \\ x + y = 0, \end{cases}$$

убеждаемся, что их нет. Тогда окончательно получаем:

$$\max z = \max\{-3; -2\} = -2, \quad \min z = \min\{-5; -3\} = -5.$$

522. Найдём сначала стационарные точки внутри области. Из системы

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0, \\ f'_y = 4y = 0, \\ f'_z = 6z = 0, \end{cases}$$

получаем единственную точку $M_0(0, 0, 0)$, которая принадлежит области.

Теперь поищем экстремумы функции f на границе области, т. е. при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 100$. Иными словами, решим задачу на условный экстремум. Составляя функцию Лагранжа $L(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(100 - x^2 - y^2 - z^2)$, из системы

$$\begin{cases} L'_x = 2x - 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 4y - 2\lambda y = 0, \\ L'_z = 6z - 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 100, \end{cases}$$

получаем три стационарные точки $M_1(10, 0, 0)$ при $\lambda = 1$, $M_2(0, 10, 0)$ при $\lambda = 2$, $M_3(0, 0, 10)$ при $\lambda = 3$. Вычислим значения функции f в найденных точках: $f(M_0) = 0$, $f(M_1) = 100$, $f(M_2) = 200$, $f(M_3) = 300$. Отсюда видно, что глобальный минимум равен $\min f(x, y, z) = f(M_0) = 0$, а глобальный максимум равен $\max f(x, y, z) = f(M_3) = 300$.

523. Вершины треугольника находятся в точках $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Введём функцию суммы квадратов расстояний от искомой точки (x, y) до вершин треугольника:

$$\begin{aligned} z &= ((x - 0)^2 + (y - 0)^2) + ((x - 0)^2 + (y - 1)^2) + ((x - 1)^2 + (y - 0)^2) = \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2. \end{aligned}$$

Требуется найти её минимум на треугольнике, т. е. на множестве, определённом неравенствами $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 1 - x$ (сделайте рисунок). Минимум может достигаться внутри треугольника или на его границе. Чтобы найти экстремальные точки внутри треугольника, решим задачу на безусловный экстремум. Найдём стационарные точки функции:

$$\begin{cases} z'_x = 2(3x - 1) = 0, \\ z'_y = 2(3y - 1) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Если экстремум есть, он достигается в этой точке $M(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, причём $z(M) = \frac{4}{3}$.

Экстремальные значения могут также достигаться на границе треугольника. Найдём на границе точки возможного экстремума.

1) Левая граница треугольника задаётся уравнением $x = 0$, $y \in [0, 1]$. В её точках функция упрощается и принимает вид $z = 3y^2 - 2y + 2$, где $y \in [0, 1]$. Тогда $z'_y = 2(3y - 1) = 0$ при $y = \frac{1}{3}$. Минимум может достигаться либо в точке $y = \frac{1}{3}$ ($z(\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$), либо на концах отрезка в точках $y = 0$ ($z(0) = 2$) или $y = 1$ ($z(1) = 3$). Но все эти значения больше $\frac{4}{3}$, поэтому минимум достигается не на этой границе.

2) Аналогично получается и на втором катете треугольника $y = 0$, $x \in [0, 1]$.

3) Исследуем гипотенузу $y = 1 - x$, $x \in [0, 1]$. На ней функция принимает вид $z = 6x^2 - 6x + 3$, $z'_x = 12x - 6 = 0$ при $x = \frac{1}{2}$, причём $z(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} > \frac{4}{3}$. Минимум может достигаться также на концах отрезка $x \in [0, 1]$: $z(0) = 3$, $z(1) = 3$. Сравнивая эти три значения со значением $z(M)$, видим, что они больше $\frac{4}{3}$, поэтому минимум не достигается и на гипотенузе треугольника.

Вывод: минимальные значения на границе множества оказались больше, чем в точке $M(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ внутри треугольника. Значит, минимум достигается внутри треугольника в точке M и равен $z(M) = \frac{4}{3}$. Заметим, что найденная точка M является центром масс (тяжести) треугольника. Задача решалась без использования метода множителей Лагранжа.

524. Сформулируем задачу. Обозначим эти числа $x_1, x_2, \dots, x_5$. Необходимо максимизировать функцию $f = x_1 x_2 \dots x_5$ при условии $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = a$. Это задача на условный экстремум, решим её методом неопределённых множителей Лагранжа. Так как числа положительны, то решение упростится, если максимизировать $u = \ln f$. Выпишем функцию Лагранжа:

$$L = \sum_{n=1}^5 \ln x_n + \lambda \left(\sum_{n=1}^5 x_n - a \right) = \sum_{n=1}^5 (\ln x_n + \lambda x_n) - \lambda a.$$

1) Найдём экстремальную точку:

$$\begin{cases} L'_{x_1} = \frac{1}{x_1} + \lambda = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ L'_{x_5} = \frac{1}{x_5} + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_5 = a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\lambda}, \\ \dots\dots\dots, \\ x_5 = -\frac{1}{\lambda}, \\ \lambda = -\frac{5}{a}. \end{cases}$$

Единственная стационарная точка: $M(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda})$, где $\lambda = -\frac{5}{a}$.

2) Покажем, оценив знак второго дифференциала, что в этой точке достигается максимум:

$$dL = \sum_{n=1}^5 \left(\frac{1}{x_n} + \lambda \right) dx_n, \quad d^2L = \sum_{n=1}^5 \left(-\frac{1}{x_n^2} \right) dx_n^2 < 0,$$

т. е. в этой точке достигается условный локальный максимум.

Ответ: число следует разбить на 5 равных частей.

525. Пусть x и y – катеты треугольника, а z – гипотенуза. Так как $z^2 = x^2 + y^2$, то задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $xy - 2S = 0$. Рассмотрим функцию Лагранжа $L = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2S)$ и найдём стационарную точку:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + \lambda y = 0, \\ L'_y = 2y + \lambda x = 0, \\ \frac{xy}{2} = S, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2S}, \\ y = \sqrt{2S}, \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

Проверив достаточное условие (расширенный критерий Сильвестра (3)), убеждаемся, что гипотенуза имеет наименьшее значение, если катеты треугольника равны между собой.

526. Расстояние r между точками (x, y, z) и $T(0, 0, 3)$ определяется формулой $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 3)^2}$. Поэтому исходная задача равносильна задаче об условном максимуме функции $u = r^2 = x^2 + y^2 + (z - 3)^2$ с уравнением связи $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$. Составим функцию Лагранжа

$$L = x^2 + y^2 + (z - 3)^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8)$$

и найдём её стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 2y + 4\lambda y = 0, \\ L'_z = 2z - 6 + 8\lambda z = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8, \end{cases}$$

откуда получаем $\lambda = -1$ и две точки возможного условного максимума $M_1(2, 0, -1)$ и $M_2(-2, 0, -1)$. Дифференцируя уравнение связи, находим

$xdx + 2ydy + 4zdz = 0$, откуда $dz = -\frac{x}{4z}dx - \frac{y}{2z}dy$. Теперь вычисляем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2L = 2(1 + \lambda)dx^2 + 2\lambda(1 + 2\lambda)dy^2 + 2(1 + 8\lambda)dz^2.$$

Подставляя в него $\lambda = -1$, выражение для dz и последовательно координаты точек M_1 и M_2 , получаем в каждом случае отрицательно определённую квадратичную форму от двух переменных dx, dy : $d^2L = -3,5dx^2 - 2dy^2 < 0$. Отсюда следует, что функция имеет в этих точках условный максимум, т. е. на эллипсоиде имеются две точки M_1 и M_2 , наиболее удалённые от точки T .

11 СЕМИНАР: Замена переменных в дифференциальных выражениях (уравнениях)

«Лучший способ изучить что-либо — это открыть самому».

*Д. Пойа (1887–1985) – венгерский, швейцарский
и американский математик,
популяризатор науки.*

Семинар рассчитан на 2 занятия.

Домашнее задание к первому занятию (п. 11.1, случаи I–IV; п. 11.2, случай V.1): 528–531, 533–538, 541, 544, 546, 548, 550.

Домашнее задание ко второму занятию (п. 11.2, случаи V.2–VII): 551, 552, 554, 556, 557, 562 + решение вариантов, подготовка к зачёту.

Просьба ко всем: хотелось бы, в порядке обратной связи, собрать ваши отзывы о задачнике. Напишите, пожалуйста, мне на почту khorelenay@yandex.ru (можно очень кратко, в свободной форме) о вашем впечатлении о данном учебном пособии: удобно ли было вам работать с ним в течение года, было ли это для вас полезно и чего вам в нём, быть может, не хватало, что хотелось бы изменить. Или вам было бы достаточно использования на семинарах задачника Б.П. Демидовича? На ваш взгляд, наличие решений помогало или, наоборот, мешало процессу вашего обучения? Нужно ли разрабатывать и издавать для студентов такого рода учебные пособия (с решениями) по другим дисциплинам?

При решении дифференциальных уравнений в частных производных и их систем часто оказывается целесообразным перейти от одних переменных к другим, которые связаны с исходными переменными определёнными соотношениями. Удачная замена переменных позволяет упростить дифференциальное уравнение путём приведения его к виду, удобному для последующего интегрирования. Для этой цели иногда приходится осуществлять замену не только независимых переменных, но и самой функции. При замене переменных используются методы дифференцирования сложных и неявно заданных функций.

Обратимся к технике этих преобразований. Рассмотрим различные случаи замены переменных, начиная с простейших, и продемонстрируем на примерах, как это делается.

11.1 Дифференциальные преобразования с функциями одной переменной

Случай I (зависимая и независимая переменные меняются местами: $y(x) \rightarrow x(y)$). Пусть дано некоторое дифференциальное выражение $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots)$, содержащее независимую переменную x , функцию от неё $y(x)$, а также производные от y по x до некоторого порядка. Необходимо преобразовать это выражение к такому виду, чтобы обе переменные поменяли свои роли: y стало новой независимой переменной, а x , наоборот, зависимой переменной, т. е. функцией от y :

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) \rightarrow \bar{F}(y, x(y), x'(y), x''(y), \dots).$$

Выразим все производные $y', y'', y''', \dots$ через $x', x'', x''', \dots$, воспользовавшись теоремой о производной обратной функции. Преобразуем первую производную:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'} \quad (x' \neq 0); \quad (1)$$

Начнём преобразование второй производной. По определению имеем

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

Умножим и разделим полученное выражение на dy , перейдя в результате от оператора $\frac{d}{dx}$ дифференцирования по переменной x к оператору $\frac{d}{dy}$ дифференцирования по переменной y :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{x'} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{x'} \right) = \frac{1}{x'} \cdot \left(-\frac{x''}{(x')^2} \right). \quad (2)$$

Окончательно для второй производной имеем $y'' = -\frac{x''}{(x')^3}$. Аналогично для третьей производной получим

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx} \left(-\frac{x''}{(x')^3} \right) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} \left(-\frac{x''}{(x')^3} \right) = \\ &= \frac{1}{x'} \cdot \left(-\frac{x''' \cdot (x')^3 - x'' \cdot 3(x')^2 \cdot x''}{(x')^6} \right) = \frac{-x''' \cdot x' + 3(x'')^2}{(x')^5}. \end{aligned} \quad (3)$$

Пример 147. [8, № 3431], [3, № 3234; аналог] Преобразовать обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y' \cdot y''' - 3(y'')^2 = x,$$

приняв y за новую независимую переменную.

Решение. Подставим в исходное уравнение выражения для производных (1),(2) и (3):

$$\frac{1}{x'} \cdot \frac{-x''' \cdot x' + 3(x'')^2}{(x')^5} - 3 \left(-\frac{x''}{(x')^3} \right)^2 = x,$$

При условии $x' \neq 0$ упрощая, получим

$$\frac{-x'''}{(x')^5} - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x''' + x(x')^5 = 0.$$

Ответ: $\frac{d^3x}{dy^3} + x \left(\frac{dx}{dy} \right)^5 = 0. \quad \square$

Случай II (меняется только независимая переменная: $y(x) \rightarrow y(t)$).

Рассмотрим случай, когда в обыкновенном дифференциальном уравнении (выражении) заменяется лишь независимая переменная x на новую независимую переменную t , а зависимая переменная y остается прежней, только теперь она будет зависеть от t . Чтобы это можно было сделать, даётся уравнение $x = x(t)$ (*уравнение связи*), связывающее старую и новую независимые переменные. Таким образом, необходимо выполнить преобразование:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) \rightarrow \bar{F}(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots).$$

При условии $x'_t \neq 0$ преобразуем вначале первую производную y'_x одновременным делением её дифференциалов dy и dx на dt . При этом осуществляется переход от дифференцирования по переменной x к дифференцированию по переменной t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (4)$$

Теперь преобразуем вторую производную. Для этого также перейдём от оператора $\frac{d}{dx}$ дифференцирования по переменной x к оператору $\frac{d}{dt}$ дифференцирования по переменной t :

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right) = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right) = \\ &= \frac{1}{x'_t} \cdot \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^2} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для третьей производной имеем:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3} \right) = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3} \right) =$$

(ниже все производные берутся по переменной t)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{x'_t} \cdot \frac{(y'''x' + y''x'' - y'x''' - y'x''')(x')^3 - (y''x' - y'x'')3(x')^2x''}{(x')^6} = \\
 &= \frac{(y'''_t x'_t - y'_t x'''_t)x'_t - 3x''_t(y''_t x'_t - y'_t x''_t)}{(x'_t)^5}.
 \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются производные более высоких порядков.

Пример 148. [8, № 3434] Вводя новую независимую переменную t , преобразовать обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x^2 y'' + xy' + y = 0, \quad \text{если } x = e^t.$$

Решение. Применяя формулы (4),(5), получим

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t}{e^t}, \\
 \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3} = \frac{y''_t \cdot e^t - y'_t \cdot e^t}{(e^t)^3} = \frac{y''_t - y'_t}{e^{2t}}.
 \end{aligned}$$

Подставляя e^t вместо x и обе производные в уравнение, получим

$$(e^t)^2 \cdot \frac{y''_t - y'_t}{e^{2t}} + e^t \cdot \frac{y'_t}{e^t} + y = 0, \quad \text{или} \quad y''_t + y = 0. \quad \square$$

Случай III (меняется только зависимая переменная: $y(x) \rightarrow u(x)$).
 Пусть теперь в ОДУ необходимо заменить неизвестную функцию $y(x)$ на новую функцию $u(x)$, оставив при этом прежней независимую переменную x , т. е.

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) \rightarrow \bar{F}(x, u(x), u'(x), u''(x), \dots).$$

Будем считать, что при этом даётся уравнение связи вида $y = y(u(x), x)$. В этой ситуации производная первого порядка находится непосредственным дифференцированием уравнения связи по переменной x с учётом того, что $u = u(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Производная второго порядка находится непосредственным дифференцированием производной первого порядка и т. д.

Пример 149. Вводя новую переменную, преобразовать обыкновенное дифференциальное уравнение

$$2y'' - y' + x = 0, \quad \text{если } y(x) = x \cdot u(x).$$

Решение. Продифференцировав по x уравнение связи $y(x) = x \cdot u(x)$, преобразуем первую производную:

$$y' = u + xu'.$$

Продифференцировав ещё раз по x , найдём вторую производную:

$$y'' = u' + u' + xu'' = 2u' + xu''.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$2(2u' + xu'') - (u + xu') + x = 0 \Leftrightarrow 2xu'' + (4 - x)u' - u + x = 0. \square$$

Случай IV (меняются обе переменные – зависимая и независимая: $y(x) \rightarrow u(v)$). Пусть в дифференциальном выражении необходимо заменить как независимую, так и зависимую переменные, т. е. x заменить на v , а функцию $y(x)$ заменить на $u(v)$:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) \rightarrow \bar{F}(v, u(v), u'(v), u''(v), \dots),$$

используя два уравнения связи: $y = y(u(v), v)$, $x = x(u(v), v)$. Чтобы выполнить это, достаточно от оператора дифференцирования по переменной x перейти к оператору дифференцирования по новой переменной v , а затем воспользоваться непосредственным дифференцированием уравнений связи. Так, преобразуем первую производную:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dv}{dx/dv} = \frac{\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dv} + \frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{du}{dv} + \frac{\partial x}{\partial v}} \quad \text{и т. д.}$$

Пример 150. [8, № 3450], [3, № 3236] Преобразовать к полярным координатам, полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$.

Решение. Здесь $x = x(r(\varphi), \varphi)$, $y = y(r(\varphi), \varphi)$ и заменяются обе переменные: и функция $y \rightarrow r$, и независимая переменная $x \rightarrow \varphi$. Преобразуем первую производную:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{\frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}} = \frac{\sin \varphi \cdot r'_\varphi + r \cos \varphi}{\cos \varphi \cdot r'_\varphi - r \sin \varphi}.$$

Подставим в уравнение:

$$\frac{\sin \varphi \cdot r'_\varphi + r \cos \varphi}{\cos \varphi \cdot r'_\varphi - r \sin \varphi} = \frac{r \cos \varphi + r \sin \varphi}{r \cos \varphi - r \sin \varphi}.$$

Перемножая по диагонали и упрощая, получим $r^2 = rr'$, или $r(r - r') = 0$. Так как $r \neq 0$ при всех φ , то отсюда получаем дифференциальное уравнение $r'_\varphi = r$, или $\frac{dr}{d\varphi} = r$. $\square$

11.2 Дифференциальные преобразования с функциями двух переменных

«Я ничего не понимала в математике, поэтому мне пришлось думать».

Джоан Робинсон (англ. Joan Violet Robinson; 1903–1983) – английский экономист и общественный деятель, член Британской академии наук.

Везде ниже будем считать, что замена переменных производится в той области, где якобиан перехода к новым переменным существует и отличен от нуля, не оговаривая это дополнительно.

Случай V.1 (меняются обе независимые переменные: $z(x, y) \rightarrow z(\xi, \eta)$; **формулы перехода:** $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$). Пусть в дифференциальном выражении, зависящем от некоторой функции $z = z(x, y)$ и её частных производных, необходимо заменить обе независимые переменные, оставив при этом неизменной зависимую переменную z . При этом формулы перехода к новым переменным имеют вид: $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ (т. е. переменные ξ и η заданы явно, а переменные x и y , соответственно, неявно). Иными словами, необходимо выполнить преобразование

$$\begin{aligned} F(x, y, z(x, y), z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, \dots) &\rightarrow \\ &\rightarrow \bar{F}(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z'_\xi, z'_\eta, z''_{\xi\xi}, z''_{\xi\eta}, z''_{\eta\eta}, \dots). \end{aligned}$$

По правилу дифференцирования сложной функции $z = z(\xi(x, y), \eta(x, y))$ для частных производных первого порядка имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

а для частных производных второго порядка соответственно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

При переходе к новым переменным в данной постановке задачи могут возникнуть определённые сложности с явным выражением x и y через ξ и η .

Пример 151. [8, № 3458] Вводя новые независимые переменные, решить дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \text{если } \xi = x + y, \quad \eta = x - y.$$

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Подставив в уравнение, получим $2 \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$. Решая уравнение $\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$, находим $z = f(\xi) = f(x + y)$, где f – произвольная дифференцируемая функция. $\square$

Случай V.2 (меняются обе независимые переменные: $z(x, y) \rightarrow z(\xi, \eta)$; формулы перехода: $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$). Пусть в рассматриваемой выше задаче

$$\begin{aligned} F(x, y, z(x, y), z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, \dots) &\rightarrow \\ \rightarrow \bar{F}(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z'_\xi, z'_\eta, z''_{\xi\xi}, z''_{\xi\eta}, z''_{\eta\eta}, \dots) \end{aligned}$$

уравнения связи даны в другом виде: $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, т. е. переменные x и y теперь заданы явно, а переменные ξ и η – неявно. Преобразуем производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (7)$$

Чтобы вычислить эти производные, нам необходимы частные производные $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y}$, а также $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$. Найдём их, дифференцируя последовательно уравнения связи по x и по y :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(x) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{d}{dy}(y) = \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{d}{dx}(y) = \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{d}{dy}(x) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ 1 = \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим частные производные $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$ и затем подставляем их в выражения (6) и (7).

Пример 152. [8, № 3481] Преобразовать к полярным координатам r и φ , полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, следующее выражение:

$$W = x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Решение. Здесь требуется преобразовать $u(x, y) \rightarrow u(r, \varphi)$. Для частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (9)$$

Необходимые выражения для производных $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}$ определяются из системы уравнений, полученной дифференцированием уравнений связи $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ по x и y :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(x) = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \cos \varphi + r \cdot \frac{\partial(\cos \varphi)}{\partial x}, \\ \frac{d}{dx}(y) = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \sin \varphi + r \cdot \frac{\partial(\sin \varphi)}{\partial x}, \\ \frac{d}{dy}(x) = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \cos \varphi + r \cdot \frac{\partial(\cos \varphi)}{\partial y}, \\ \frac{d}{dy}(y) = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \sin \varphi + r \cdot \frac{\partial(\sin \varphi)}{\partial y}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ 1 = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}$, находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi. \quad (11)$$

Подставим (10), (11) в (8), (9):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \left(-\frac{\sin \varphi}{r}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Теперь подставим найденные частные производные в исходное выражение:

$$W = r \cos \varphi \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r}\right) -$$

$$-r \sin \varphi \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} \right) = \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad \square$$

Рассмотрим теперь способ, основанный на вычислении дифференциалов.

Пример 153. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0, \quad \text{если } x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v.$$

Решение. С одной стороны, первоначально $z = z(x, y)$, поэтому

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial x} (e^u \cos v du - e^u \sin v dv) + \frac{\partial z}{\partial y} (e^u \sin v du + e^u \cos v dv) = \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} e^u \cos v + \frac{\partial z}{\partial y} e^u \sin v \right) du + \left(-\frac{\partial z}{\partial x} e^u \sin v + \frac{\partial z}{\partial y} e^u \cos v \right) dv. \end{aligned} \quad (1)$$

С другой стороны, т. к. в результате преобразований получаем $z = z(u, v)$, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \quad (2)$$

Приравнявая коэффициенты при du и dv в (1) и (2), находим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ из системы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} e^u \cos v + \frac{\partial z}{\partial y} e^u \sin v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial z}{\partial x} e^u \sin v + \frac{\partial z}{\partial y} e^u \cos v.$$

Далее, аналогичными рассуждениями получаем, что, с одной стороны,

$$\begin{aligned} d^2 z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (e^u \cos v du - e^u \sin v dv)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} (e^u \cos v du - e^u \sin v dv)(e^u \sin v du + e^u \cos v dv) + \\ &\quad + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (e^u \sin v du + e^u \cos v dv)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} (e^u \cos v du^2 - 2e^u \sin v dudv - e^u \cos v dv^2) + \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial y} (e^u \sin v du^2 + 2e^u \cos v dudv - e^u \sin v dv^2). \end{aligned} \quad (3)$$

С другой стороны,

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} dudv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} dv^2. \quad (4)$$

Приравнявая коэффициенты при du^2 , $dudv$, dv^2 в (3) и (4), и подставляя найденные выше производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, получаем систему линейных уравнений для нахождения

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Подставляя, окончательно, найденные выражения для производных в исходное уравнение, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + e^{2u} m^2 z = 0. \quad \square$$

Случай VI (меняются функция и обе независимые переменные:
 $z = z(x, y) \rightarrow w = w(u, v)$); **формулы перехода:** $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$,
 $w = w(x, y, z)$. Пусть необходимо заменить функцию и обе независимых пере-
 менных $z = z(x, y) \rightarrow w = w(u, v)$, т. е. выполнить следующее преобразование
 дифференциального выражения в частных производных:

$$\begin{aligned} F(x, y, z(x, y), z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, \dots) \rightarrow \\ \rightarrow \bar{F}(u, v, w(u, v), w'_u, w'_v, w''_{uu}, w''_{uv}, w''_{vv}, \dots) \end{aligned}$$

при условии, что даны три уравнения связи: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$,
 $w = w(x, y, z)$.

Рассмотрим два способа решения этой задачи.

1-й способ. Первый способ основан на вычислении дифференциалов двумя разными способами. Приравнявая потом их значения, получаем соотношение, из которого находим необходимые производные соответствующего порядка. Этот способ используется, когда необходимо найти сразу все частные производные нужного порядка. Продемонстрируем этот способ на примере функций, дифференцируемых один раз.

Поскольку $w = w(u, v)$, то

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv = \frac{\partial w}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right). \quad (12)$$

С другой стороны, $w = w(x, y, z)$, где $z = z(x, y)$, поэтому

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right). \quad (13)$$

Приравняв правые части (12) и (13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \\ = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right). \end{aligned}$$

В левой и правой частях соберём выражения при dx и dy :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \\ & = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy. \end{aligned}$$

Приравняем выражения при dx и при dy и выразим после этого $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial z}}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial z}}. \quad (15)$$

2-й способ. Второй способ быстрее, если нужно вычислить какую-либо (не все сразу) частную производную. Найдём, например, $\frac{\partial z}{\partial x}$. Поскольку $w = w(u, v)$, то

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

С другой стороны, так как $w = w(x, y, z)$, то

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Заметим, что в левой части последнего равенства через $\frac{dw}{dx}$ обозначена полная производная w по x , а в правой части через $\frac{\partial w}{\partial x}$ обозначена частная производная w по x .

Приравняв правые части двух последних равенств, получаем тот же результат, что и в (14):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial z}}.$$

Аналогично находится частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Пример 154. [8, № 3474] Перейти к новым переменным u, v, w , где $w = w(u, v)$, в уравнении

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z,$$

если $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $w = \ln z - (x + y)$.

Решение. *1-й способ.* Воспользуемся формулами (14),(15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 1}{\frac{1}{z}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) + 1}{\frac{1}{z}}. \end{aligned}$$

Подставим в уравнение:

$$\begin{aligned} y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= (y - x)z \Leftrightarrow \\ yz \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot 2x - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} + 1 \right) - xz \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot 2y - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} + 1 \right) &= (y - x)z. \end{aligned}$$

Упрощая, получим

$$\frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} \right) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial w}{\partial v} = 0,$$

если рассматривать общий случай, когда $x \neq y$.

2-й способ. Продифференцируем обе части равенства $\ln z - (x + y) = w(u, v)$ как сложные функции x и y :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} - 1 &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \cdot \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}, \\ \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} - 1 &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \cdot \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}. \end{aligned}$$

Отсюда находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z \left(1 + 2x \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z \left(1 + 2y \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right),$$

и так далее. Решением уравнения является функция $w = \varphi(u)$, или $\ln z - x - y = \varphi(x^2 + y^2)$, где φ – произвольная дифференцируемая функция. Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид $z = \exp(x + y + \varphi(x^2 + y^2))$. $\square$

Случай VII (меняются функция и обе независимые переменные:
 $z = z(x, y) \rightarrow w = w(u, v)$; **формулы перехода:** $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$,
 $w = w(x, y, z)$). Наконец, рассмотрим предыдущую задачу, но с более общи-
ми уравнениями связи. Пусть необходимо заменить как функцию, так и обе
независимых переменных $z = z(x, y) \rightarrow w = w(u, v)$, т. е. выполнить преобра-
зование

$$\begin{aligned} & F(x, y, z(x, y), z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, \dots) \rightarrow \\ & \rightarrow \bar{F}(u, v, w(u, v), w'_u, w'_v, w''_{uu}, w''_{uv}, w''_{vv}, \dots) \end{aligned}$$

если $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$, где u, v, w – функции, до-
статочное число раз дифференцируемые в рассматриваемой области, причём
якобиан преобразования

$$\left| \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} \right| \neq 0.$$

1-й способ. Первый способ используется, когда нужно преобразовать сразу
все частные производные. Этот способ предполагает использование диффе-
ренциала такого же порядка, какой имеют необходимые производные. Пока-
жем, как преобразуются частные производные 1-го порядка.

Поскольку $w = w(u, v)$, то

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv.$$

С другой стороны, так как $w = w(x, y, z)$, то

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Приравнивая правые части, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Подставляя в левую часть этого равенства

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right),$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right),$$

а в правую часть $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, получим равенство, в котором слева и
справа все выражено через dx и dy . Приравнивая коэффициенты при dx и при
 dy , получим систему двух равенств

$$\frac{\partial w}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y},$$

из которой находим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}}. \quad (16)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}}. \quad (17)$$

2-й способ. Второй способ более быстрый и используется при вычислении конкретной частной производной. Так как $w = w(x, y, z)$ и $w = w(u, v)$, то, дифференцируя w по x в двух представлениях и приравнявая, получаем:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Учитывая в правой части, что

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

получаем:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

Выразим отсюда $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}}.$$

Аналогично находится $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Пример 155. [8, №3478] Преобразовать выражение $A = \frac{x-y}{\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}}$, полагая

$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \arctg z$, $w = x + y + z$, где $w = w(u, v)$.

Решение. Воспользуемся формулами преобразований (16) и (17):

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot 0 - 1}{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{1}{1 + z^2} - 1}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot 0 - 1}{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{1}{1 + z^2} - 1}.\end{aligned}$$

Подставляя эти производные в исходное выражение, получим

$$A = \frac{\frac{x - y}{\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}}}{\frac{1 - \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} - 1}} = \frac{1 - \frac{1}{1 + z^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial u}}.$$

Поскольку $x^2 + y^2 = e^{2u}$, $\frac{1}{1 + z^2} = \cos^2 v$, то окончательно имеем:

$$A = \frac{e^{2u}}{\frac{\partial w}{\partial u}} \left(1 - \cos^2 v \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \right). \square$$

Возможны и другие ситуации замены переменных в дифференциальных выражениях, в том числе с неявными уравнениями связи между переменными, замена переменных в системах дифференциальных уравнений и прочее.

11.3 Задачи для самостоятельного решения

Случай I (зависимая и независимая переменные меняются местами $y(x) \rightarrow x(y)$):

№527. [3, № 3233; аналог] В обыкновенном дифференциальном уравнении

$$\frac{y''}{(y')^3} - x = 0$$

перейти к функции x от переменной y .

№528. Принимая y за новую независимую переменную, а x — за функцию, преобразовать ОДУ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (e^y - x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 = 0.$$

№529. Преобразовать уравнение

$$3 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0,$$

приняв y за аргумент.

Случай II (меняется только независимая переменная $y(x) \rightarrow y(t)$):

№530. [8, № 3435] Вводя новую независимую переменную t (вместо x), преобразовать обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y''' = \frac{6y}{x^3}, \quad \text{если } t = \ln x.$$

№531. [3, № 3230; аналог] Преобразовать уравнение

$$x^4 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3 \cdot \frac{dy}{dx} - y = 0, \quad \text{полагая } x = \frac{1}{t}.$$

№532. [5, Пример 5.25] В выражении

$$(1 - x^2)y' - xy,$$

где $y = y(x)$, $x \in (-1, 1)$, перейти к переменной t , если $x = \sin t$.

№533. [3, № 3231] Преобразовать дифференциальное выражение

$$x^2 y'' - 4xy' + y,$$

заменив независимую переменную, если $x = e^z$.

Случай III (меняется только зависимая переменная $y(x) \rightarrow u(x)$):

№534. [3, № 3235] Преобразовать выражение к новой функции v , полагая $y = 1/v$:

$$yy'' - 2(y^2 + y'^2).$$

№535. [8, № 3438] Вводя новую переменную, преобразовать обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0, \quad \text{если } y(x) = u(x) \cdot e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}, \quad \text{где } p(x) \in \mathbb{C}^1.$$

Случай IV (меняются обе переменные – зависимая и независимая $y(x) \rightarrow u(v)$):

№536. [8, № 3433] Преобразовать ОДУ

$$y'' + \frac{2}{x} \cdot y' + y = 0,$$

приняв x за функцию и $t = xu$ за независимую переменную.

№537. [8, № 3442] Вводя новые переменные, преобразовать обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0,$$

если $x = u + t$, $y = u - t$, где $u = u(t)$.

№538. В дифференциальном уравнении

$$y \cdot y' + x \cdot y^2 + x^3 = 0$$

перейти к новым переменным u и t , где u – функция переменной t . Формулы замены имеют вид: $u^2 - y^2 - x^2 = 0$, $x^2 - t^2 + u^2 = 0$.

№539. В дифференциальном уравнении

$$(1 + x^2)^2 \cdot y'' = y$$

перейти к новым переменным, если $x = \operatorname{tg} t$, $y = \frac{u}{\cos t}$, где $u = u(t)$.

№540. [5, Пример 5.27] В выражении

$$2y'' + (x + y)(1 - y')^3,$$

где $y = y(x)$, перейти к функции $v(t)$, если $x = v + t$, $y = v - t$.

№541. [8, № 3453] Преобразовать к полярным координатам, полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, дифференциальное выражение

$$\frac{x + yy'}{xy' - y}.$$

№542. [3, №3237] Выражение $k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ преобразовать к полярным координатам r, φ .

№543. В системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 2kx(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2ky(x^2 + y^2), \end{cases} \text{ где } k > 0,$$

перейти к полярным координатам, заменив функции $x(t), y(t)$ на $r(t), \varphi(t)$.

Случай V.1 (меняются обе независимые переменные $z(x, y) \rightarrow z(u, v)$; формулы перехода $u = u(x, y), v = v(x, y)$):

№544. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать уравнение

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}, \quad \text{если } u = 2x - z^2, \quad v = \frac{y}{z}.$$

№545. [10, с.37] Преобразовать уравнение к новым независимым переменным u и v и решить его

$$2y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + e^x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 4ye^x,$$

если $u = y^2 + e^x, v = y^2 - e^x$.

№546. [8, №3462] Принимая u и v за новые независимые переменные и оставляя функцию z , преобразовать дифференциальное уравнение в частных производных

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy,$$

если $u = \ln x, v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

№547. [8, №3463] Принимая u и v за новые независимые переменные, преобразовать уравнение

$$(x+y) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - (x-y) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

если $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

№548. [8, №3459] Вводя новые независимые переменные, решить уравнение в частных производных

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{если } \xi = x, \quad \eta = x^2 + y^2.$$

№549. В уравнении

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

перейти к новым переменным u, v , если $u = xy, v = \frac{x}{y}$.

№550. [8, № 3489] Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать уравнение

$$2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

если $u = x + 2y + 2, v = x - y - 1$.

Случай V.2 (меняются обе независимые переменные $z(x, y) \rightarrow z(u, v)$; формулы перехода $x = x(u, v), y = y(u, v)$):

№551. Преобразовать выражение

$$W = x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

к независимым переменным u и v , если $x = u, y = \frac{u}{1 + uv}$.

№552. [3, № 3239] Преобразовать (двумерный) оператор Лапласа¹ к полярным координатам

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

№553. [10, с. 41] Преобразовать уравнение, перейдя в нём к полярным координатам (с сохранением функции z)

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Случай V.3 (меняются обе независимые переменные $z(x, y) \rightarrow z(u, v)$; формулы перехода $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$):

№554. Принимая u и v за новые независимые переменные и оставляя функцию z , преобразовать уравнение

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z},$$

если $u = 2x - z^2, v = \frac{y}{z}$.

¹Пьер-Симон Лаплас (1749–1827) – французский астроном, математик и физик.

№555. [10, с. 38] Преобразовать уравнение

$$(x + z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

к новым независимым переменным u и v и решить его, если $u = x$, $v = \frac{y + z}{x + z}$.

Случай V.4 (меняются местами зависимая и одна из независимых переменных $z(x, y) \rightarrow x(y, z)$):

№556. Преобразовать уравнение

$$(x - z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

взяв x за функцию, y, z – за независимые переменные.

Случай VI.1 (меняются функция и обе независимые переменные $z = z(x, y) \rightarrow w = w(u, v)$; формулы перехода $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y, z)$):

№557. [8, № 3513] Приняв u и v за новые независимые переменные и $w = w(u, v)$ за новую функцию, преобразовать уравнение

$$y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}, \quad \text{если } u = \frac{x}{y}, \quad v = x, \quad w = xz - y.$$

№558. [8, № 3517] Приняв u и v за новые независимые переменные и $w = w(u, v)$ за новую функцию, преобразовать уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

если $u = x$, $v = x + y$, $w = x + y + z$.

№559. [10, с. 55] Преобразовать дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

приняв $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$ за новые независимые переменные, а $w(u, v) = \frac{z}{x}$ за новую функцию.

Случай VI.2 (меняются функция и обе независимые переменные $z = z(x, y) \rightarrow w = w(u, v)$; формулы перехода $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v, w)$):

№560. Преобразовать выражение

$$W = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

принимая u и v за новые независимые переменные, а $w = w(u, v)$ – за новую функцию, где

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}, \quad z = \frac{u^2 - v^2}{4} - w.$$

Случай VI.3 (меняются функция и обе независимые переменные $z = z(x, y) \rightarrow w = w(u, v)$; формулы перехода $x = x(u, w)$, $y = y(v, w)$, $z = z(w)$):

№561. Приняв u и v за новые независимые переменные, а $w = w(u, v)$ – за новую функцию, преобразовать к новым переменным уравнение

$$x^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + y^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y},$$

если $x = ue^w$, $y = ve^w$, $z = we^w$.

Случай VII (меняются функция и обе независимые переменные $z = z(x, y) \rightarrow w = w(u, v)$; формулы перехода $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$):

№562. [8, № 3479] Преобразовать выражение

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y},$$

полагая $u = xe^z$, $v = ye^z$, $w = ze^z$, где $w = w(u, v)$.

№563. [5, Пример № 8.33] Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v , преобразовать к новым переменным дифференциальное уравнение

$$(xy + z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x + yz,$$

если $u = yz - x$, $v = xz - y$, $w = xy - z$.

Случай VIII (меняются функция и обе независимые переменные $z = z(x, y) \rightarrow w = w(u, v)$; формулы перехода заданы неявно $F(u, v, x, y) = 0$, $G(u, v, x, y) = 0$, $P(z, u, v, w) = 0$):

№564. Преобразовать уравнение, содержащее частные производные, перейдя к новым переменным u , v и новой функции $w = w(u, v)$, если

$$\frac{x^2 + y^4}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x(1 + y^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^3}{x} - xy,$$

где $u^2 + v^2 = -x^2 + y^2$, $v = \frac{x}{y}$, $\sin(w - z) = u$.

11.4 Ответы и решения

527. Преобразуем первую производную: $y' = \frac{1}{x'}$.

Найдём вторую производную:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{x'} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{x'} \right) = \frac{1}{x'} \cdot \left(-\frac{x''}{(x')^2} \right) = -\frac{x''}{(x')^3}.$$

Подставим в дифференциальное уравнение:

$$\frac{y''}{(y')^3} - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-\frac{x''}{(x')^3}}{\left(\frac{1}{x'}\right)^3} - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'' + x = 0.$$

528. Преобразуем первую производную: $y' = \frac{1}{x'}$.

Преобразуем вторую производную:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{x'} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{x'} \right) = \frac{1}{x'} \cdot \left(-\frac{x''}{(x')^2} \right) = -\frac{x''}{(x')^3}.$$

Подставим в дифференциальное уравнение:

$$-\frac{x''}{(x')^3} + (e^y - x) \left(\frac{1}{x'} \right)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'' + x - e^y = 0.$$

529. Выразим производные y по x через производные обратной функции:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x'}, \quad y'' = -\frac{x''}{(x')^3}, \quad y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx} \left(-\frac{x''}{(x')^3} \right) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} \left(-\frac{x''}{(x')^3} \right) = \\ &= \frac{1}{x'} \cdot \left(-\frac{x''' \cdot (x')^3 - x'' \cdot 3(x')^2 \cdot x''}{(x')^6} \right) = \frac{-x''' \cdot x' + 3(x'')^2}{(x')^5}. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение и упрощая, получаем

$$3 \frac{(x'')^2}{(x')^6} + \frac{x'''x' - 3(x'')^2}{(x')^6} + \frac{x''}{(x')^5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x''' + x''}{(x')^5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x''' + x'' = 0 \quad (x' \neq 0).$$

530. При $x > 0$ по формулам (4),(5) с учётом $x = e^t$ имеем:

$$1) \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t}{e^t};$$

$$2) \quad y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3} = \frac{y''_{tt} - y'_t}{e^{2t}};$$

$$\begin{aligned} 3) \quad y'''_{xxx} &= \frac{(y'''x' - y'x''')x' - 3(y''x' - y'x'')x''}{(x')^5} = \\ &= \frac{(y'''_{ttt} - y'_t) - 3(y''_{tt} - y'_t)}{e^{3t}} = \frac{y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t}{e^{3t}}. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение, получим

$$y'''_{xxx} = \frac{6y}{x^3} \Leftrightarrow \frac{y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t}{e^{3t}} = \frac{6y}{e^{3t}} \Leftrightarrow y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t - 6y = 0.$$

531. Преобразуем производные:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t}{-\frac{1}{t^2}} = -t^2 \cdot \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} \left(-t^2 \cdot \frac{dy}{dt} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2t \cdot \frac{dy}{dt} - t^2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2}}{-\frac{1}{t^2}} = \\ &= 2t^3 \frac{dy}{dt} + t^4 \cdot \frac{d^2y}{dt^2}. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения производных и выражение $x = 1/t$ в исходное уравнение:

$$\frac{1}{t^4} \cdot \left(2t^3 \frac{dy}{dt} + t^4 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \right) + \frac{2}{t^3} \left(-t^2 \cdot \frac{dy}{dt} \right) - y = 0.$$

После упрощения получаем: $\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$.

532. Так как $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t}{\cos t}$, то получаем

$$(1 - x^2)y' - xy = (1 - \sin^2 t) \frac{y'_t}{\cos t} - y \sin t = \cos t \cdot y'_t - y \sin t.$$

533. Так как $x = e^z$, то

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dz}{dx/dz} = \frac{dy}{dz} e^{-z}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dz} e^{-z} \right) = \frac{1}{\frac{dx}{dz}} \frac{d}{dz} \left(\frac{dy}{dz} e^{-z} \right) = \\ &= \frac{1}{e^z} \left(\frac{d^2y}{dz^2} \cdot e^{-z} + \frac{dy}{dz} \cdot (-e^{-z}) \right) = \frac{1}{e^{2z}} \left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right). \end{aligned}$$

Подставляя в выражение, получим

$$\begin{aligned} x^2 y''_{xx} - 4x y'_x + y &= e^{2z} \cdot \frac{1}{e^{2z}} (y''_{zz} - y'_z) - 4e^z y'_z e^{-z} + y = \\ &= y''_{zz} - y'_z - 4y'_z + y = y''_{zz} - 5y'_z + y. \end{aligned}$$

534. $y = \frac{1}{v} \Rightarrow y' = -\frac{v'}{v^2} \Rightarrow y'' = \frac{2v'^2 - v''v}{v^3}$. Подставляя в выражение, получим

$$yy'' - 2(y^2 + y'^2) = \frac{1}{v} \cdot \frac{2v'^2 - v''v}{v^3} - 2 \left(\frac{1}{v^2} + \left(-\frac{v'}{v^2} \right)^2 \right) = -\frac{v'' + 2v}{v^3}.$$

535. Обозначим $A(x) = -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi$ и преобразуем первую производную:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (u(x) \cdot e^{A(x)})' = u'(x) \cdot e^{A(x)} + u(x) \cdot e^{A(x)} A'(x) = \\ &= e^{A(x)} \left(u'(x) + u(x) \cdot \left(-\frac{1}{2} p(x) \right) \right). \end{aligned}$$

Преобразуем вторую производную:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \left(e^{A(x)} \left(u'(x) + u(x) \cdot \left(-\frac{1}{2} p(x) \right) \right) \right)' = \\ &= e^{A(x)} A'(x) \left(u'(x) + u(x) \cdot \left(-\frac{1}{2} p(x) \right) \right) + \\ &+ e^{A(x)} \cdot (u''(x) - \frac{1}{2}(u'(x)p(x) + u(x)p'(x))) = \\ &= e^{A(x)} \cdot \left(u''(x) - p(x)u'(x) - \frac{1}{2}u(x)p'(x) + \frac{1}{4}u(x)p^2(x) \right). \end{aligned}$$

Подставляя в исходное уравнение, после упрощения получим

$$u''(x) + \left(q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x) \right) \cdot u(x) = 0.$$

536. Имеем $x = x(t)$, $y = y(t, x(t)) = \frac{t}{x(t)}$, поэтому $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{t}{x^2}$, и для первой производной получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{x'x} - \frac{t}{x^2};$$

для второй производной имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x'x} - \frac{t}{x^2} \right) = \frac{1}{x'} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{x'x} - \frac{t}{x^2} \right) = \\ &= \dots = -\frac{x''}{x(x')^3} + \frac{2t}{x^3} - \frac{2}{x'x^2}. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение, получим

$$-\frac{x''}{x(x')^3} + \frac{2t}{x^3} - \frac{2}{x'x^2} + \frac{2}{x} \left(\frac{1}{x'x} - \frac{t}{x^2} \right) + y = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-\frac{x''}{x(x')^3} + \frac{t}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} - t \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 = 0.$$

537. По условию, заменяются обе переменные: зависимая и независимая, причём уравнения связи даны в виде $y = y(u(t), t)$, $x = x(u(t), t)$.

1) Преобразуем вначале первую производную, перейдя от оператора дифференцирования по x к оператору дифференцирования по t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t}} = \frac{1 \cdot u'_t - 1}{1 \cdot u'_t + 1} = \frac{u'_t - 1}{u'_t + 1}.$$

2) Преобразуем теперь вторую производную, также переходя к оператору дифференцирования по t (при $u'_t + 1 \neq 0$):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{u'_t - 1}{u'_t + 1} \right) = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{u'_t - 1}{u'_t + 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{u'_t + 1} \cdot \frac{u''_{tt}(u'_t + 1) - (u'_t - 1)u''_{tt}}{(u'_t + 1)^2} = \frac{2u''_{tt}}{(u'_t + 1)^3}.$$

3) Подставим преобразованные производные в уравнение:

$$y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{2u''_{tt}}{(u'_t + 1)^3} + ((u + t) + (u - t)) \left(1 + \frac{u'_t - 1}{u'_t + 1} \right)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$u'' + 8u(u')^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2u}{dt^2} + 8u \left(\frac{du}{dt} \right)^3 = 0.$$

538. Продифференцируем уравнения связи по переменной t :

$$\begin{cases} 2u \cdot u' - 2y \cdot y' - 2x \cdot x' = 0, \\ 2x \cdot x' - 2t + 2u \cdot u' = 0. \end{cases}$$

Из системы находим $x'_t = \frac{t - u \cdot u'}{x}$, $y'_t = \frac{2u \cdot u' - t}{y}$. Тогда можно найти производную

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2u \cdot u' - t}{t - u \cdot u'} \cdot \frac{x}{y}.$$

Подставим в дифференциальное уравнение:

$$y \cdot y' + x \cdot y^2 + x^3 = 0 \Leftrightarrow y \cdot \frac{2u \cdot u' - t}{t - u \cdot u'} \cdot \frac{x}{y} + x \cdot y^2 + x^3 = 0$$

$$\frac{2u \cdot u' - t}{t - u \cdot u'} \cdot x + x \cdot y^2 + x^3 = 0.$$

Поделив на x и учитывая, что $y^2 + x^2 = u^2$, получаем

$$\frac{2u \cdot u' - t}{t - u \cdot u'} + u^2 = 0, \quad \text{или} \quad u'(u^3 - 2u) = t(u^2 - 1).$$

539. Продифференцируем уравнения связи по переменной t :

$$x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad y'(t) = \frac{u' \cdot \cos t + u \cdot \sin t}{\cos^2 t}.$$

Найдём первую производную $y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = u' \cdot \cos t + u \cdot \sin t$.

Преобразуем вторую производную:

$$y''(x) = \frac{(y'(x))'_t}{x'(t)} = (u' \cdot \cos t + u \cdot \sin t)'_t \cdot \cos^2 t = (u'' + u) \cos^3 t.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$(1 + x^2)^2 \cdot y'' = y \Leftrightarrow (1 + \operatorname{tg}^2 t)^2 \cdot (u'' + u) \cos^3 t = \frac{u}{\cos t}.$$

Учитывая, что $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, получим $u'' = 0$.

540. Имеем $x'_t = v'_t + 1$, $y'_t = v'_t - 1$, откуда находим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{v'_t - 1}{v'_t + 1}; \quad y''_{xx} = \frac{1}{x'_t} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{v'_t - 1}{v'_t + 1} \right) = \frac{2v''_{tt}}{(v'_t + 1)^3}.$$

Подставляя выражения для x , y , y'_x , y''_{xx} в исходное выражение, получаем

$$\frac{4v''_{tt}}{(v'_t + 1)^3} + 2v \left(1 - \frac{v'_t - 1}{v'_t + 1} \right)^3 = \frac{4v''_{tt} + 16v}{(v'_t + 1)^3}.$$

541. Здесь заменяются обе переменные: как функция $y \rightarrow r$, так и независимая переменная $x \rightarrow \varphi$. Имеем $x = x(\varphi, r(\varphi))$, $y = y(\varphi, r(\varphi))$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \varphi}} = \frac{r \cos \varphi + \sin \varphi \cdot r'_\varphi}{-r \sin \varphi + \cos \varphi \cdot r'_\varphi}.$$

Подставим в выражение:

$$\frac{x + yy'}{xy' - y} = \frac{r \cos \varphi + r \sin \varphi \cdot \frac{r \cos \varphi + \sin \varphi \cdot r'_\varphi}{-r \sin \varphi + \cos \varphi \cdot r'_\varphi}}{r \cos \varphi \cdot \frac{r \cos \varphi + \sin \varphi \cdot r'_\varphi}{-r \sin \varphi + \cos \varphi \cdot r'_\varphi} - r \sin \varphi}.$$

Упрощая выражение, получим $\frac{rr'}{r^2}$, или $\frac{r'}{r}$ (так как $r \neq 0$, иначе выражение не определено).

542. Имеем $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi \Rightarrow$

$$y' = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi},$$

$$\text{тогда } 1 + y'^2 = \frac{r^2 + r'^2}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2}, \quad y'' = \frac{(y')'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{2r'^2 + r^2 - r''r}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3}.$$

$$\text{Окончательно, } k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2r'^2 + r^2 - r''r}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

543. Умножим первое уравнение на x , второе на y и сложим. Аналогично, умножим первое уравнение на y и вычтем из него второе уравнение, умноженное на x . Получим новую систему уравнений, эквивалентную исходной системе (при условии $x^2 + y^2 > 0$):

$$\begin{cases} x \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt} = -2k(x^2 + y^2)^2, \\ y \cdot \frac{dx}{dt} - x \cdot \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Но $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$, поэтому получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(r \cos \varphi) = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(r \sin \varphi) = \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Тогда

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = \left(r \frac{dr}{dt} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) + \left(r \frac{dr}{dt} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) = r \frac{dr}{dt}.$$

Аналогично находим

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{2} r \sin 2\varphi \frac{dr}{dt} - r^2 \sin^2 \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) - \left(\frac{1}{2} r \sin 2\varphi \frac{dr}{dt} + r^2 \cos^2 \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) = -r^2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Подставляя в систему, получим

$$\begin{cases} r \frac{dr}{dt} = -2kr^4, \\ -r^2 \frac{d\varphi}{dt} = r^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dr}{dt} = -2kr^3, \\ \frac{d\varphi}{dt} = -1. \end{cases}$$

544. С одной стороны, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. С другой стороны,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial u} \left(2dx - 2z \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \right) \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{zdy - y \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \right)}{z^2}.$$

Приравнявая коэффициенты при dx и dy , получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \left(2 - 2z \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left(-\frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \left(-2z \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

откуда находим производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 \cdot \frac{\partial z}{\partial u}}{1 + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}}{1 + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}}.$$

Подставляя эти производные, а также $x = \frac{u+z^2}{2}$, $y = vz$ в исходное уравнение, окончательно получим

$$v(z^2 - u^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = z(u^2 + z^2).$$

545. 1) Преобразуем уравнение. Считая $z = z(u(x, y), v(x, y))$ сложной функцией переменных x и y , имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \frac{\partial z}{\partial u} + (-e^x) \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \frac{\partial z}{\partial u} + 2y \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Подставив в исходное уравнение, получим, что оно принимает простой вид $\frac{\partial z}{\partial u} = 1$.

2) Решим уравнение. Легко видеть, что решение имеет вид $z = u + \varphi(v)$, где $\varphi(v)$ – произвольная дифференцируемая функция. Возвращаясь к переменным x и y , получаем $z = y^2 + e^x + \varphi(y^2 - e^x)$.

546. По правилу дифференцирования сложной функции преобразуем частные производные ($x > 0$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + 0 \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}$$

Выразим, далее, x и y через u и v :

$$\begin{aligned}u = \ln x &\Rightarrow x = e^u, \quad v = \ln(y + \sqrt{1+y^2}), \\ -v &= -\ln(y + \sqrt{1+y^2}) = \ln \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} = \ln(-y + \sqrt{1+y^2}).\end{aligned}$$

Отсюда $e^v = y + \sqrt{1+y^2}$, $e^{-v} = -y + \sqrt{1+y^2} \Rightarrow y = \frac{e^v - e^{-v}}{2} = \operatorname{sh} v$. Подставляя в уравнение, получим

$$e^u \left(\frac{1}{e^u} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 v}} \frac{\partial z}{\partial v} = e^u \cdot \operatorname{sh} v,$$

т. е. $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = e^u \cdot \operatorname{sh} v$.

547. Преобразуем частные производные 1-го порядка:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}$$

Подставляя в уравнение, получим

$$\begin{aligned}&(x+y) \left(\frac{x}{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \\ &-(x-y) \left(\frac{y}{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0.\end{aligned}$$

548. Имеем $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(x, y)$, поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot 2x = \frac{\partial z}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot 0 + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot 2y = 2y \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Подставим в уравнение:

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) - x \cdot 2y \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$$

Отсюда либо $y \equiv 0$, либо (в общем случае) $\frac{\partial z}{\partial \xi} = 0$. Последнее означает, что z не зависит от ξ , а значит, решением уравнения является $z = f(\eta) = f(x^2 + y^2)$, где f – произвольная дифференцируемая функция.

549. По формуле полного дифференциала $dz = z'_u du + z'_v dv$. Для второго дифференциала имеем: $d^2z = d(dz) = d(z'_u du + z'_v dv)$. Пользуясь правилами вычисления дифференциала, находим

$$d^2z = z''_{uu} du^2 + 2z''_{uv} dudv + z''_{vv} dv^2 + z'_u d^2u + z'_v d^2v.$$

В данном случае $du = ydx + xdy$, $dv = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}$, $d^2u = 2dxdy$, $d^2v = -\frac{2dxdy}{y^2} + \frac{3xdy^2}{y^3}$. Подставим во второй дифференциал:

$$\begin{aligned} d^2z &= z''_{uu}(ydx + xdy)^2 + 2z''_{uv}(ydx + xdy) \left(\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} \right) + \\ &+ z''_{vv} \left(\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} \right)^2 + 2z'_u dxdy + z'_v \left(-\frac{2dxdy}{y^2} + \frac{3xdy^2}{y^3} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что в выражении для d^2z частная производная z''_{xx} – это коэффициент при dx^2 , а частная производная z''_{yy} есть коэффициент при dy^2 , находим

$$z''_{xx} = z''_{uu}y^2 + 2z''_{uv} + \frac{z''_{vv}}{y^2}, \quad z''_{yy} = z''_{uu}x^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{y^2} z''_{uv} + \frac{x^2}{y^4} z''_{vv} + \frac{2x}{y^3} z'_v.$$

Подставляя эти выражения в первоначальное уравнение, получаем ответ: $2u \cdot z''_{uv} - z'_v = 0$.

550. 1) По правилу дифференцирования сложной функции, преобразуем частные производные 1-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned}$$

2) Преобразуем производные 2-го порядка:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

Аналогично находим остальные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

3) Подставляя производные в исходное уравнение, получим:

$$\begin{aligned}& 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + \left(2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) - \\ & - \left(4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \left(2 \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0, \\ & 9 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 3 \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0.\end{aligned}$$

551. Обратим формулы преобразования, выразив u и v через x и y : $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$. Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{1}{x^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right).\end{aligned}$$

Подставляя в выражение, находим

$$W = x^2 \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{1}{x^2} \right) + y^2 \left(\frac{\partial z}{\partial v} \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right) \right) = u^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial u}.$$

552. Имеем: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \varphi.\end{aligned}$$

Решая систему, получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi. \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{r} \sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) = \\
 &= \cos \varphi \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{r} \sin \varphi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \sin \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi \right), \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{r} \cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) = \\
 &= \sin \varphi \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin \varphi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cos \varphi \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{r} \cos \varphi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi \right).
 \end{aligned}$$

Подставляя в оператор Лапласа, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

553. Найдём $\frac{\partial z}{\partial x}$, дифференцируя z как сложную функцию $z = z(r(x, y), \varphi(x, y))$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Для определения r'_x и φ'_x продифференцируем соотношения, связывающие декартовы и полярные координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$1 = \cos \varphi \cdot r'_x - r \sin \varphi \cdot \varphi'_x,$$

$$0 = \sin \varphi \cdot r'_x + r \cos \varphi \cdot \varphi'_x.$$

Решая эту систему относительно r'_x и φ'_x , получаем

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos \varphi \cdot \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin \varphi \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем окончательный вид

$$r \cdot \frac{\partial z}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial r} = 0.$$

554. По правилу дифференцирования сложной функции найдём частные производные ($z \neq 0$):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (1)$$

Найдём $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. Для этого продифференцируем по x и y уравнения связи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2 - 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{z - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}. \end{aligned}$$

Подставим в (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \left(2 - 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \left(-\frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \left(-2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \left(\frac{z - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{z^2} \right), \end{aligned}$$

откуда находим выражения для частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 \cdot \frac{\partial z}{\partial u}}{1 + 2z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}}{1 + 2z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial v}}.$$

Кроме того, из уравнений связи выражаем x и y через u и v : $x = \frac{u+z^2}{2}$, $y = vz$. Подставляя эти выражения и частные производные в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{u+z^2}{2} \cdot \frac{2 \cdot \frac{\partial z}{\partial u}}{1 + 2z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial v}} + vz \cdot \frac{\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}}{1 + 2z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial v}} = \frac{u+z^2}{z},$$

Сократив в первом слагаемом на 2, а во втором на z и умножая равенство на $z \left(1 + 2z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial v}\right)$, после упрощений получаем дифференциальное уравнение

$$v \cdot \frac{\partial z}{\partial v} (z^2 - u) = (u + z^2)z.$$

555. 1) Преобразуем уравнение. Дифференцируя z по x как сложную функцию переменных x и y , получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

Так как $z = z(x, y)$, то при вычислении v'_x необходимо учитывать, что в силу второго уравнения связи $v = \frac{y+z}{x+z}$ функция v есть сложная функция переменных x и y , поэтому $u'_x = 1$,

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{z'_x(x+z) - (1+z'_x)(y+z)}{(x+z)^2} = \\ &= \frac{z'_x}{x+z} - \frac{z'_x}{x+z} \cdot \frac{y+z}{x+z} - \frac{1}{x+z} \cdot \frac{y+z}{x+z} = z'_x \cdot \frac{1-v}{x+z} - \frac{v}{x+z}. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (1), находим

$$z'_x = z'_u + z'_v \left(z'_x \cdot \frac{1-v}{x+z} - \frac{v}{x+z} \right),$$

откуда

$$z'_x = \frac{z'_u - \frac{v}{x+z} z'_v}{1 + \frac{v-1}{x+z} z'_v}.$$

Аналогичным образом находим

$$z'_y = \frac{\frac{1}{x+z} z'_v}{1 + \frac{v-1}{x+z} z'_v}.$$

Подставляя теперь эти производные в исходное уравнение, получим

$$(x+z) \frac{z'_u - \frac{v}{x+z} z'_v}{1 + \frac{v-1}{x+z} z'_v} + (y+z) \frac{\frac{1}{x+z} z'_v}{1 + \frac{v-1}{x+z} z'_v} = 0,$$

или

$$(x+z)z'_u - vz'_v + \frac{y+z}{x+z}z'_v = 0.$$

Отсюда с учётом второго из уравнений связи $v = \frac{y+z}{x+z}$ находим

$$(x+z)\frac{\partial z}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

2) Решением этого уравнения является $z = \varphi(v)$, или $z = \varphi\left(\frac{y+z}{x+z}\right)$, где φ – произвольная (дифференцируемая) функция.

556. 1-й способ. Постановка задачи означает, что надо перейти в уравнении к новым переменным u, v и функции $w = w(u, v)$, где $u = y, v = z, w = x$. Таким образом, имеем: $x = w(y, z(x, y))$. Продифференцируем это равенство по x и по y :

$$1 = w'_v \cdot z'_x, \quad 0 = w'_u + w'_v \cdot z'_y,$$

откуда $z'_x = \frac{1}{w'_v}, z'_y = -\frac{w'_u}{w'_v}$. Подставив в уравнение, получим

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (w-v)\frac{1}{w'_v} + u\left(-\frac{w'_u}{w'_v}\right) = 0,$$

т. е. $uw'_u = w - v$. Возвращаясь к переменным x, y, z , перепишем уравнение в окончательном виде $yx'_y = x - z$.

2-й способ. Составим тождество, содержащее функции $z(x, y)$ и $x(y, z)$ и записанное в виде равенства двух функций от независимых переменных y и z : $z = z(x(y, z), y)$. Дифференцируя это тождество, имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial z}dz\right) + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

и, приравнявая коэффициенты при dz и dy слева и справа, получаем равенства $1 = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z}, 0 = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}$, откуда $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\partial x / \partial z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial x / \partial y}{\partial x / \partial z}$. Подставляя эти выражения производных в исходное уравнение, приходим к ответу: $y \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = x - z$.

557. Для преобразования первой производной воспользуемся формулой (15):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot 0 + 1}{x} = -\frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x}.$$

Преобразуем теперь вторую производную:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} \right) = -\left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y^2} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right) \right) = \frac{2}{y^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{x}{y^4} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}.\end{aligned}$$

Подставим в исходное уравнение:

$$\begin{aligned}y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{2}{x} \Leftrightarrow y \cdot \left(\frac{2}{y^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{x}{y^4} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x} \right) = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \\ \frac{x}{y^3} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0.\end{aligned}$$

558. Для преобразования первой производной воспользуемся формулами (16) и (17), подставляя в них $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial w}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial z} = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial w}} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1}{-1} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial w}} = \dots = \frac{\partial w}{\partial v} - 1.\end{aligned}$$

Дифференцируя последние равенства, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1 \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1 \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - 1 \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

Подставляя в исходное уравнение, с учётом $x = u$, $y = v - u$ получаем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\frac{v}{u} - 1\right) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

559. Продифференцируем обе части уравнения $\frac{z}{x} = w(u, v)$ по x , считая w сложной функцией переменных x, y :

$$\begin{aligned} -\frac{z}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v}, \\ \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial v}. \end{aligned}$$

Отсюда с учётом уравнений связи имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x \frac{\partial w}{\partial u} - v \frac{\partial w}{\partial v} + w, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}. \quad (1)$$

Дифференцируя первое равенство (1) по x , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial w}{\partial u} + x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial v} - \\ &\quad - v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial w}{\partial u} + x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} \right) + \frac{y}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} - v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} = x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2v \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} + \frac{v^2}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial w}{\partial u}. \end{aligned}$$

Аналогично, дифференцируя второе равенство (1) по x и y , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - v \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} - \frac{v}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \frac{\partial w}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$\frac{(v+1)^2}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(v+1)^3}{u} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0,$$

где учтено, что из уравнений связи $x = \frac{u}{v+1}$. Таким образом, в новых переменных уравнение принимает простой вид $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

560. Имеем:

$$z'_x = \left(\frac{u}{2} - w'_u\right) u'_x - \left(\frac{v}{2} + w'_v\right) v'_x, \quad z'_y = \left(\frac{u}{2} - w'_u\right) u'_y - \left(\frac{v}{2} + w'_v\right) v'_y$$

и

$$1 = \frac{1}{2}u'_x + \frac{1}{2}v'_x, \quad 0 = \frac{1}{2}u'_y + \frac{1}{2}v'_y, \quad 0 = \frac{1}{2}u'_x - \frac{1}{2}v'_x, \quad 1 = \frac{1}{2}u'_y - \frac{1}{2}v'_y.$$

Из последних равенств находим $u'_x = 1$, $v'_x = 1$, $u'_y = 1$, $v'_y = -1$, поэтому

$$z'_x = \frac{u-v}{2} - (w'_u + w'_v), \quad z'_y = \frac{u+v}{2} - (w'_u - w'_v).$$

Далее имеем

$$z''_{xx} = \frac{1}{2} - (w''_{u^2} + w''_{uv}) - \frac{1}{2} - (w''_{uv} + w''_{v^2}) = -(w''_{u^2} + 2w''_{uv} + w''_{v^2}),$$

$$z''_{xy} = \frac{1}{2} - (w''_{u^2} + w''_{uv}) + \frac{1}{2} + (w''_{uv} + w''_{v^2}) = 1 - (w''_{u^2} - w''_{v^2}),$$

$$z''_{yy} = \frac{1}{2} - (w''_{u^2} - w''_{uv}) - \frac{1}{2} + (w''_{uv} - w''_{v^2}) = -(w''_{u^2} - 2w''_{uv} + w''_{v^2}).$$

Подставляя в исходное выражение, получаем $W = -4w''_{u^2} + 2$.

561. Составим тождество, содержащее функции $z(x, y)$ и $w(u, v)$ и записанное в виде равенства двух функций от независимых переменных u и v : $w(u, v)e^{w(u, v)} = z(ue^{w(u, v)}, ve^{w(u, v)})$. Дифференцируя это тождество, имеем

$$\begin{aligned} & (e^w + we^w) \left(\frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv \right) = \\ & = \frac{\partial z}{\partial x} \left(e^w du + ue^w \left(\frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv \right) \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(e^w dv + ve^w \left(\frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv \right) \right). \end{aligned}$$

Сокращая на e^w и приравнивая коэффициенты при du и dv , получаем систему линейных уравнений относительно $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$(1+w) \frac{\partial w}{\partial u} = \left(1 + u \frac{\partial w}{\partial u}\right) \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$(1+w) \frac{\partial w}{\partial v} = u \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \left(1 + v \frac{\partial w}{\partial v}\right) \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Решая эту систему, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(1+w) \frac{\partial w}{\partial u}}{1 + u \frac{\partial w}{\partial u} + v \frac{\partial w}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1+w) \frac{\partial w}{\partial v}}{1 + u \frac{\partial w}{\partial u} + v \frac{\partial w}{\partial v}}.$$

Подставляя эти выражения для производных и выражения $x = ue^w$, $y = ve^w$, $z = we^w$ в исходное уравнение, получаем

$$u^2 \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 = w^2 \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}.$$

562. Воспользуемся формулами преобразований (16) и (17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= - \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}} = \\ &= - \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot e^z + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot 0 - 0}{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot xe^z + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot ye^z - (e^z + ze^z)} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{x \frac{\partial w}{\partial u} + y \frac{\partial w}{\partial v} - 1 - z}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= - \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}} = \\ &= - \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot e^z - 0}{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot xe^z + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot ye^z - (e^z + ze^z)} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{x \frac{\partial w}{\partial u} + y \frac{\partial w}{\partial v} - 1 - z}. \end{aligned}$$

Тогда, подставляя в выражение, получим:

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} : \frac{\partial w}{\partial v}.$$

563. По условию имеем тождество $xy - z(x, y) = w(yz(x, y) - x, xz(x, y) - y)$ с функциями $z = z(x, y)$, $w = w(u, v)$ и независимыми переменными x и y . Дифференцируя это тождество, получаем

$$\begin{aligned} &xdy + ydx - \frac{\partial z}{\partial x}dx - \frac{\partial z}{\partial y}dy = \\ &= \frac{\partial w}{\partial u} \left(y \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \right) + zdy - dx \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(x \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \right) + zdx - dy \right). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при dx и dy слева и справа, получаем

$$y - \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \left(y \frac{\partial z}{\partial x} - 1 \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + z \right),$$

$$x - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \left(y \frac{\partial z}{\partial y} + z \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(x \frac{\partial z}{\partial y} - 1 \right),$$

откуда находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y + \frac{\partial w}{\partial u} - z \frac{\partial w}{\partial v}}{1 + y \frac{\partial w}{\partial u} + x \frac{\partial w}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - z \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}{1 + y \frac{\partial w}{\partial u} + x \frac{\partial w}{\partial v}}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial v} \cdot (-2xyz - z^2 + 1 - y^2 - x^2) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

564. Найдём $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, для чего с учётом $w = w(u, v)$ продифференцируем равенство $\sin(w - z) = u$ по x и по y :

$$\cos(w - z) \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\cos(w - z) \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Отсюда находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\cos(w - z)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\cos(w - z)} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2)$$

Дифференцируя равенства $u^2 + v^2 = -x^2 + y^2$, $v = \frac{x}{y}$ по x и, соответственно,

по y , находим $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ из систем

$$\begin{cases} 2u \cdot u'_x + 2v \cdot v'_x = -2x, \\ v'_x = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x = -\frac{v+xy}{uy}, \\ v'_x = \frac{1}{y}. \end{cases}$$

Аналогично

$$\begin{cases} 2u \cdot u'_y + 2v \cdot v'_y = 2y, \\ v'_y = -\frac{x}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_y = \frac{xv + y^3}{y^2 u}, \\ v'_y = -\frac{x}{y^2}. \end{cases}$$

Подставим производные (1),(2) в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^4}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x(1 + y^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{y^3}{x} - xy \Leftrightarrow \\ \frac{x^2 + y^4}{y} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\cos(w - z)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ + x(1 + y^2) \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\cos(w - z)} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{y^3}{x} - xy. \end{aligned}$$

Заметим, что слагаемые, содержащие $\frac{\partial w}{\partial u}$, а также слагаемые с $\frac{1}{\cos(w - z)}$, взаимно уничтожаются. В результате остаётся

$$\frac{x^2 + y^4}{y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} - \frac{x^2}{y^2}(1 + y^2) \cdot \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{y^3}{x} - xy,$$

откуда после упрощений окончательно получаем $v \cdot \frac{\partial w}{\partial v} = 1$.

12 Варианты заданий для самопроверки, подготовки к контрольным работам и зачёту

*«Правило № 1 на странице № 1
руководства по ведению войны гласит:
«Не ходи на Москву!»*

*Бернард Монтгомери (1887—1976) – британский фельдмаршал,
крупный военачальник Второй мировой войны.
Заместитель Верховного главнокомандующего объединёнными
силами НАТО в Европе (до своей отставки в 1958 году).*

При подготовке к предстоящей контрольной работе выделите достаточное время для *повторения* решений основных типов задач, изучаемых в текущем семестре. Запомните приёмы и методы решений.

Выполните варианты заданий каждое в течение не более 1,5 часов, никуда не подсматривая, полностью самостоятельно. Поставьте себе оценки согласно критериям:

+, если задача решена полностью верно (приведены необходимые обоснования, ход решения и ответ верные);

±, если задача в целом решена верно, но в решении присутствует *очень небольшая* погрешность, не влияющая на общий алгоритм решения;

+/-, если имеем промежуточный вариант между соседними случаями (задача, большей частью, решена, но есть довольно существенные погрешности в решении);

∓, если при решении допущены грубые ошибки (в том числе арифметические), влияющие на ход решения, но, тем не менее, есть небольшое продвижение в решении;

–, если допущено более одной грубой ошибки, много мелких ошибок, недостаточное обоснование, незнание определений и формулировок используемых теорем, видно непонимание подходов к решению данного типа задач.

Выставьте себе примерную оценку (помните, что более точно ваши знания может оценить только ваш преподаватель):

- 5–6 задач с оценками + и ± (оценка 5);
 - 4 задачи с оценками + и ± (оценка 4);
 - 3 задачи с оценками + и ± (оценка 3);
 - всё остальное (решено менее половины предложенных в варианте задач)
- неудовлетворительно.

Проанализируйте свои ошибки, старайтесь в дальнейшем их не допускать.

P.S. Решения задач разобраны в пособии.

12.1 ВАРИАНТ № 1

1	2	3	4	5	6

1. Приведите определения открытого m -мерного шара и изолированной точки множества в $\mathbb{R}^m$.

2. Сформулируйте понятие (кратного) предела функции нескольких переменных в заданной точке по Коши и по Гейне. Вычислите предел функции

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|xyz|}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

3. Сформулируйте понятие непрерывности функции по каждой переменной и по их совокупности. Исследуйте на непрерывность в точке $(0, 0)$ по каждой переменной в отдельности и по совокупности переменных функцию:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x(x-y)}{x^2 + xy + y^2}}, & x^2 + xy + y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

4. Сформулируйте определение дифференцируемой в точке (x_0, y_0) функции $u = f(x, y)$. Исследуйте на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3 - y^3}{x^2 + 5y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

5. Напишите уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $t = \frac{\pi}{4}$ к кривой

$$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \frac{1}{2} \sin 2t, \\ z = \cos^2 t. \end{cases}$$

6. Разложите по целым неотрицательным степеням x и y до 4-го порядка включительно функцию

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{1 + xy}{1 + x^2 + y} \right).$$

12.2 ВАРИАНТ № 2

1	2	3	4	5	6

1. Приведите определения предельной, внутренней и граничной точек множества в $\mathbb{R}^m$.

2. Приведите определение кратного предела функции (по Коши и по Гейне) m переменных. Вычислите предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}}.$$

3. Сформулируйте понятие функции, равномерно непрерывной на заданном множестве в $\mathbb{R}^m$. Исследуйте на равномерную непрерывность при $|x| < +\infty$, $|y| < +\infty$ функцию

$$f(x, y) = x^2 + \sqrt{|y|}.$$

4. Сформулируйте понятие локального максимума (минимума) функции. Исследуйте на локальные экстремумы функцию

$$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

5. Сформулируйте понятие производной в заданном направлении. Найдите производную функции

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

в точке $(0, e)$ в направлении её градиента в этой точке.

6. Найдите частные производные и дифференциал 2-го порядка неявно заданной функции $z = z(x, y)$:

$$x + 2y + z = \ln z.$$

12.3 ВАРИАНТ № 3

1	2	3	4	5	6

1. Приведите определения открытого множества, замкнутого множества, связного множества в $\mathbb{R}^m$. Приведите примеры каждого из указанных типов множеств.

2. Исследуйте на непрерывность в точке $(0, 0)$ по каждой переменной в отдельности и по совокупности переменных функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x - y}, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

3. Найдите полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков дважды дифференцируемой сложной функции f , где x, y, z – независимые переменные:

$$u = f(x^2 - y^2 + z^2).$$

4. Сформулируйте теорему Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Разложите по формуле Тейлора в окрестности точки $B(-1, 2, 3)$ функцию

$$f(x, y, z) = 1 + x + y^2 + z^3.$$

5. Сформулируйте понятие условного экстремума. Методом неопределённых множителей Лагранжа исследуйте на экстремумы функцию

$$u(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2, \quad \text{если } 2x - y - 3 = 0.$$

6. Вводя новые переменные, преобразуйте обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (x + y) \left(1 + \frac{dy}{dx} \right)^3 = 0,$$

если $x = u + t$, $y = u - t$, где $u = u(t)$.

12.4 ВАРИАНТ № 4

1	2	3	4	5	6

1. Сформулируйте определения ограниченного множества, компактного множества в $\mathbb{R}^m$. Приведите примеры.

2. Что означает равномерная непрерывность функции на множестве? Исследуйте на равномерную непрерывность на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ функцию

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\ln(x^2 + y^2 + 1)}.$$

3. Приведите определение функции, дифференцируемой в заданной точке. Исследуйте на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{(x^4 + y^2)^3} \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

4. Найдите частные производные 2-го порядка у дважды дифференцируемой сложной функции f , где x, y, z – независимые переменные:

$$u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2).$$

5. Сформулируйте понятие локального экстремума. Исследуйте на локальные экстремумы функцию

$$z = 4 + \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}.$$

6. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ функций $y(x)$ и $z(x)$, заданных неявно системой уравнений

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$$

12.5 ВАРИАНТ № 5

1	2	3	4	5	6

1. Обозначим ∂D – граница множества $D \subset \mathbb{R}^m$. Приведите пример множества D такого, что $D \subset \partial D$.

2. Сформулируйте понятие производной в точке в заданном направлении. Найдите производную функции

$$u = xy^2 + z^2 - xyz$$

в точке $M_0(1, 2, 3)$ в направлении вектора $\vec{a}\{1, -2, 2\}$. В каком направлении производная принимает наибольшее значение?

3. Сформулируйте понятие локального экстремума и необходимое условие экстремума. Что означает термин «критическая точка», «стационарная точка»? Найдите экстремумы функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0.$$

4. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали в точке $(2, 3, 1)$ к поверхности, заданной системой

$$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u + 2v, \\ z = 2u - v. \end{cases}$$

5. Найдите производную $\frac{\partial^{17} f(0, 0)}{\partial x^7 \partial y^{10}}$ для функции

$$f(x, y) = \sin(x^7 + y^5).$$

6. Преобразуйте уравнение в частных производных

$$(x - z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

взяв x за функцию, y, z – за независимые переменные.

12.6 ВАРИАНТ № 6

1	2	3	4	5	6

1. Сформулируйте понятие ограниченной (неограниченной) функции. Является ли функция $f(x, y)$ ограниченной, если

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}, & \text{если } x^2 + y^6 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^6 = 0. \end{cases}$$

2. Покажите, что функция $f(x, y) = \cos \frac{\pi x}{y}$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной на множестве $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \neq 0\}$. Какое условие теоремы Кантора нарушено?

3. Определите понятие функции, дифференцируемой в заданной точке. Исследуйте на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ в зависимости от параметра a функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} |y|^a \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2} + 2x, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

4. Найдите первый и второй дифференциалы функции

$$u(x, y, z) = f(xyz + x - y + z).$$

5. Исследуйте на глобальный экстремум функцию

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

в замкнутой области $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$.

6. Найдите производные $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$ при $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, если

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

Предметный указатель

- Арифметические операции:
 над дифференциалами, 168
 над функциями, имеющими предел, 48
 над градиентами, 208
 над непрерывными функциями, 78
- Больцано-Вейерштрасса теорема, 21
- Бесконечно малая, бесконечно большая функция, 48
- Внешняя точка, 15
- Внутренняя точка, 15
- Всюду плотное множество, 19
- Выпуклое множество, 19
- Выпуклые функции, 279
- Граница множества, 15
- Гамильтона оператор, 206
- Гладкая функция, 161
- Градиент, 205
- Граничная точка, 15
- Дифференциал высшего порядка, 163
- Дифференцируемость функции многих переменных:
 n -кратная, 160
 частные производные, 112
 частные производные высших порядков, 159
 дифференциал, 116
 дифференциалы высших порядков, 163
 достаточное условие, 125
 геометрический смысл, 120
 градиент, 205
 необходимое условие, 124
 неявные функции, 307
 определение, 114
 полная производная, 173
 производная по направлению, 201
 сложные функции, 167
 теоремы Юнга, 161
 замена переменных, 383
- Дискретное пространство, 15
- Евклидово пространство, 12
- Замена переменных в диф. выражениях, 383
- Замкнутое множество, 15
- Градиент, 118
- Инвариантность первого дифференциала, 168
- Изолированная точка, 15
- Кантора теорема, 81
- Канторово множество, 31
- Касательная плоскость, 213
- Касательная плоскость:
 определение, 120
- Касательные и нормали
 к кривой поверхности, 213
 к плоской кривой, 210
 к пространственной кривой, 212
- Компакт, 18
- Координатное пространство, 11
- Критерий Коши сходимости последовательности, 20
- Критерий Коши существования предела в точке, 47
- Критерий Сильвестра, 275
- Критерий Сильвестра, расширенный, 353
- Критическая точка, 269
- Лагранжа, метод, 347
- Лапласа уравнение, 174
- Линейное пространство, 11
- Линия уровня, 25
- Локальный экстремум:
 достаточное условие, 272, 275, 277
 геометрический смысл, 272
 необходимое условие, 270

- определение, 269
- Маклорена формула, 243
- Матрица Гессе, 277, 280
- Матрица Якоби, 118, 172
- Метод множителей Лагранжа, 347
- Метрическое пространство, 13
- Множество:
 - диаметр множества, 17
 - граница, 15
 - компактное, 18
 - ограниченное, 17
 - открытое, 18
 - открытое, замкнутое, 15
 - расстояние между множествами, 17
 - совершенное, 19
 - связное, 17
 - выпуклое, 19
 - всюду плотное, 19
- Набла оператор, 206
- Наибольшее значение функции, 28
- Направляющие косинусы вектора, 202
- Непрерывные функции многих переменных:
 - геометрический смысл, 75
 - по каждой переменной, 74
 - по совокупности переменных, 71
 - теоремы о свойствах, 78
 - точки разрыва, 72
- Непрерывность на множестве, 73
- Неравенство Йенсена, 279
- Неравенство Коши–Шварца, 13
- Неравенство Коши–Буняковского, 12
- Неравенство треугольника, 13
- Неявно заданные функции:
 - дифференцируемость, 307
 - экстремум, 315
 - системы, 313
- Нигде не плотное множество, 19
- Норма вектора, 13
- Нормальная плоскость, 212
- Нормированное пространство, 13
- Область:
 - односвязная, 18
 - связная, 18
- Ограниченная последовательность точек, 21
- Ограниченное множество, 17
- Окрестность точки, 14
- Особые точки, 209
- Остаточный член в форме Лагранжа, Пеано, 242
- Открытое множество, 15, 18
- Полная производная, 172
- Полное приращение функции, 72, 115
- Полярные координаты, 52
- Последовательность точек, 20
- Последовательность точек:
 - критерий Коши, 20
 - ограниченная, 21
 - подпоследовательность, 21
 - понятие, 20
 - сходящаяся, 20
- Поверхность уровня, 24
- Предел функции многих переменных:
 - бесконечный, 46
 - определение, 42
 - повторные пределы, 43
 - вычисление, 50
- Предельная точка, 15
- Производная по направлению:
 - достаточные условия существования, 205
 - физический смысл, 203
 - геометрический смысл, 203
 - определение, 202, 203
 - вычисление, 202
- Расстояние между множествами, 31
- Равномерная непрерывность, 80
- Ряд Тейлора, 246
- Седловая точка, 271
- Сферические координаты, 23, 54, 129

- Сходящаяся последовательность, 20
 Скалярное поле, 24
 Сложные функции: дифференцирование, 170
 Смешанная производная, 160
 Совершенное множество, 19
 Стационарная точка, 270
 Связная область, 18
 Связное множество, 17
 Тейлора формула, 241
 Теорема
 Больцано–Вейерштрасса, 21
 достаточное условие дифференцируемости, 125
 достаточное условие локального экстремума, 273
 достаточное условие непрерывности функции в точке, 77
 достаточное условие равномерной непрерывности, 81
 Кантора, 81
 критерий непрерывности функции, 80
 Лагранжа, 126
 необходимое условие дифференцируемости, 124
 непрерывная функция переводит компакт в компакт, 80
 непрерывная функция переводит связное множество в связное, 80
 непрерывность липшицевых функций, 77
 о непрерывности сложной функции, 78
 о неявной функции, 307
 о промежуточном значении, 79
 о связи между двойным и повторными пределами, 45
 существования и дифференцируемости системы неявных функций, 313
 Вейерштрасса, 1-я, 28, 79
 Вейерштрасса, 2-я, 28, 80
 Юнга о смешанных производных, 161
 Точная грань функции, 27
 Условие Коши существования предела в точке, 47
 Условие Липшица, 77, 90
 Условие дифференцируемости, 115
 Условный экстремум, 346
 Формула Маклорена, 243
 Формула Тейлора, 241
 Функции многих переменных:
 бесконечно малые, 48
 частная производная n -го порядка, 160
 частное приращение, 74
 дифференциал высшего порядка, 163
 гладкая, 161
 график, 22
 наибольшее значение, 28
 ограниченные, 27
 определение, 22
 полное приращение, 72
 поверхности уровня, 24
 сложная функция, 168
 смешанная производная, 160
 точные грани, 27
 Функциональный определитель, 118
 Функция Лагранжа, 347
 Цилиндрические координаты, 23, 129
 Частные производные, 112
 Шар открытый m -мерный, 14
 Экстремум
 неявно заданной функции, 315
 условный, 346
 явно заданной функции, 269
 Якобиан, 118, 313

Список литературы

- [1] *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. Учеб. для вузов / Под ред. В.А. Садовничего. – 5-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2004. – 640 с. – (Классический университетский учебник)
- [2] *Беркович Ф.Д., Федий В.С., Шлыков В.И.* Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями. Учеб. пособие. – Ростов н/Д: Феникс, 2008.
- [3] *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Издательство Лань, 2016. – 492 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
- [4] *Бутузов В.Ф.* Лекции по математическому анализу. Часть II. Учеб. пособие. – М.: Физический факультет МГУ, 2014.
- [5] *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Математический анализ в задачах и упражнениях. В 3-х т. Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. – Новое изд. – М.: Изд-во Московского университета; МЦНМО, 2017. – 412 с.
- [6] *Гусак А.А.* Справочное пособие по решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения. – Мн.: ТетраСистемс, 1998. – 416 с.
- [7] *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожесвинова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1997. – 304 с.: ил.
- [8] *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Учеб. пособие. – СПб., Издательство Лань, 2017. – 624 с.
- [9] *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть I. – Изд. 10-е, испр. – М.: МЦНМО, 2019. – 564 с.: ил.
- [10] *Иванов С.В., Мартышко П.С.* Математика для физиков: Функции нескольких переменных. Теория поля. Изд. стер. – М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2014. – 296 с.
- [11] *Ильин В.А.* Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Кн. 2: учебник для вузов / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 315 с. – (Высшее образование).

-
- [12] *Кочергин А.В., Кострикин И.А.* Методические материалы по курсу математического анализа (интеграл и функции многих переменных). – М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2009. – 64с.
- [13] *Краснова С.А., Уткин В.А.* Основы математического анализа. Учебное пособие. – М.: РГГУ, 2010. – 551 с.
- [14] *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. В 3 т. Том 2: Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. – М.: Дрофа, 2004. – 720 с.
- [15] *Никитин А.А.* Математический анализ. Сборник задач: учеб. пособие для академического бакалавриата. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 353 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс).
- [16] *Никитин А.А., Фомичев В.В.* Математический анализ. Углублённый курс. Учебник и практикум. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 462 с.
- [17] *Пантаев М.Ю.* Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа. Том 2. – Ленанд, 2016. – 416 с.
- [18] *Садовничая И.В., Фоменко Т.Н.* Математический анализ: Функции многих переменных: Учебник и практикум для академического бакалавриата. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 206 с.
- [19] *Садовничий В.А., Подколзин А.С.* Задачи студенческих олимпиад по математике. – М.: Наука, 1978.
- [20] *Сизый С.В.* Математические задачи. Студенческие олимпиады математико-механического факультета Уральского госуниверситета. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 128 с.
- [21] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов / Г. М. Фихтенгольц. В 3 т. Том 1. – 16-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – 608 с.: ил.
- [22] *Шибинский В.М.* Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа. – М.: Высш. шк., 2007. – 543 с.: ил.
- [23] Интернет-источник: [https : //scask.ru/](https://scask.ru/)

Рекомендуемые книги автора по другим разделам математического анализа:

- [24] *Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Тожественные равенства и неравенства и их применение: В помощь практическим занятиям: Учеб. пособие для студентов университетов. – М.: МАКС Пресс, 2016. – 272 с.
- [25] *Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Неопределённый интеграл / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 187 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс)
- [26] *Садовничая И. В., Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Определённый интеграл. В 2 ч. Часть 1 / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 242 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс)
- [27] *Садовничая И. В., Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Определённый интеграл. В 2 ч. Часть 2 / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 199 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс)
- [28] *Садовничая И. В., Фоменко Т. Н., Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Вещественные числа и последовательности: Учеб. пособие для академического бакалавриата / Под общей ред. В.А. Ильина. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 109 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс).
- [29] *Садовничая И. В., Фоменко Т. Н., Хорошилова Е. В.* Математический анализ: Дифференцирование функций одной переменной: Учеб. пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 156 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс).

Книга содержит 155 примеров, 564 задач для самостоятельной работы (с решениями) и 44 цитат и высказываний известных людей.

Учебное издание

ХОРОШИЛОВА Елена Владимировна

КУРС СЕМИНАРОВ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Самоучитель

Книга 4

ФУНКЦИЙ МНОГИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ:
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

для очной, дистанционной и смешанной форм обучения
студентов университетов

По всем вопросам обращаться на почту:

khorelenay@yandex.ru